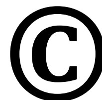
NOTAS DE CLASE

FISICA DE OSCILACIONES, ONDAS Y ÓPTICA

DEPARTAMENTO DE FISICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-MANIZALES

Hernán Vivas C.



CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El propósito de este texto es múltiple: i) Organizar y actualizar un material de trabajo que permita a docentes y estudiantes universitarios una aproximación ajustada a los requerimientos de un curso de ***Vibraciones, Ondas y Óptica*** en el ***Departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia***, sede Manizales. ii) Incentivar alternativas de discusión en clase, en donde los argumentos propios de la física asociada a los eventos prevalezcan sobre el análisis matemático. iii) Unificar criterios de trabajo en el área de las Ciencias Naturales y su papel como área fundamental en el proceso de formación en la ***Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia***, sede Manizales. Los conceptos teóricos en mecánica básica son revisados brevemente, mientras que el énfasis se realiza sobre las técnicas de resolución de al menos **580** ejercicios, incluyendo los de referencia (**PR**) con diferentes grados de dificultad. Este material con sus actualizaciones y/o correcciones puede ser descargado gratuitamente en el repositorio digital: www.bdigital.unal.edu.co/9125, el cual a su vez está protegido bajo los términos de Creative Commons http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/

Email de Contacto: hvivasc@unal.edu.co

1. OSCILACIONES

1.1. Cinemática del Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

Los fenómenos periódicos son fácilmente reconocibles en la cotidianidad. Éstos pueden identificarse *indirectamente* como el número de eventos que ocurren en cierto intervalo de tiempo. La cantidad de horas que dedicamos regularmente a trabajar o a estudiar en el día, las veces que asistimos a un servicio religioso por mes, el número de facturas por cancelar que se reciben cada dos semanas, el número de consultas democráticas en un país en un cuatrienio, etc., constituyen ejemplos comunes de eventos periódicos. Aunque éstos no necesariamente se representan a través de números exactos, si reflejan el carácter repetitivo inherente a los asuntos rutinarios asociados a la convivencia en sociedad, para los casos citados. La Naturaleza también exhibe eventos periódicos. El número de horas promedio de luz solar en un día de verano, la cantidad de ciclos de rotación de la Tierra alrededor de Sol (365,6 días de 24 horas), e incluso pueden citarse ejemplos asociados a la dinámica de los seres vivos y su reproducción. En términos Físicos, los fenómenos periódicos pueden describirse inicialmente a través de las funciones cinemáticas de posición, velocidad y aceleración de un cuerpo con respecto a un punto de referencia y un sistema de coordenadas. En esta sección se presentará una breve discusión de las funciones cinemáticas más comunes y sus conexiones matemáticas.

El movimiento de una partícula que se mueve en una dimensión se considera periódico y armónico si su posición en función del tiempo se describe a través de la relación:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

en donde A se conoce como *amplitud* (en unidades de longitud), ω es la frecuencia angular (constante, en unidades de radianes por inverso de tiempo), t corresponde al tiempo y φ la fase (radianes), la cual definiremos más adelante. La partícula está restringida a moverse entre las posiciones $-A$ y $+A$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = \pi/\omega$. La velocidad instantánea de la partícula está definida como:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

en unidades de Longitud/Tiempo. El valor máximo de la velocidad instantánea de la partícula es $A\omega$. La aceleración instantánea se define como el cambio temporal de la velocidad, y se calcula como:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t),$$

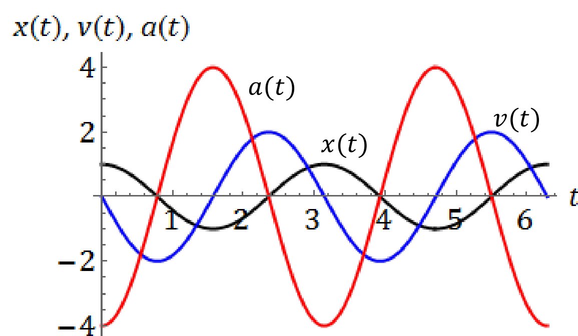
en unidades de Longitud/Tiempo^2. La relación escalar entre la velocidad y la posición, eliminando la variable t, toma la forma: (considerando $\cos\theta = \pm\sqrt{1-(\sin\theta)^2}$)

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}.$$

De esta ecuación se puede deducir que la velocidad alcanza su máximo valor cuando la posición del cuerpo coincide con el origen en $x = 0$, y la velocidad es cero en las posiciones A y $-A$. Los resultados anteriores pueden resumirse en la siguiente tabla:

x	v	a
-A	0	$A\omega^2$
0	$\pm A\omega$	0
A	0	$-A\omega^2$

Tabla 1. Relaciones entre funciones cinemáticas para valores particulares de la posición x.

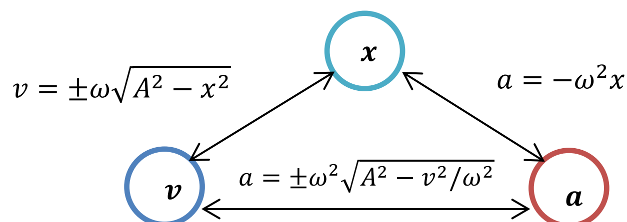


Funciones cinemáticas para la posición x(t), velocidad v(t) y aceleración a(t) con $\omega = 2$, $A = 1$ y fase inicial $\varphi = 0$.

La figura anterior ilustra las funciones cinemáticas definidas por las ecuaciones:

$$x(t) = \cos(2t), \;\; v(t) = -2\sin(2t), \;\; a(t) = -4\cos(2t).$$

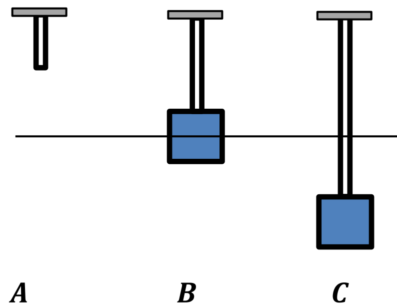
Los valores máximos de la posición, la velocidad instantánea y la aceleración son 1, 2 y 4 respectivamente, en las unidades correspondientes. El siguiente esquema resume las relaciones cinemáticas propias en un M.A.S.



RELACIONES CINÉMATICAS DEL M.A.S.

1.2 Dinámica del Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

La dinámica de un cuerpo se describe a través del concepto de *Fuerza*. En el caso del M.A.S., si asociamos al cuerpo un valor de masa M (en kg), entonces la fuerza total (en Newtons) que éste experimenta es $F = Ma = -M\omega^2 x$, (x en metros) con un valor máximo igual a $M\omega^2 A$. Obsérvese que la fuerza es proporcional al desplazamiento del objeto y el signo negativo corresponde a su dirección, en sentido contrario del desplazamiento. Este tipo de fuerza se denomina *fuerza de restitución*, y la relación lineal usualmente se conoce como *Ley de Hooke*. La constante de restitución está definida por $k = M\omega^2$, y ésta tiene unidades de N/m. El sistema masa-resorte es probablemente el sistema físico más estudiado en el contexto de la dinámica del M.A.S., y abordaremos el problema a través de un caso simple. Considere el siguiente sistema físico: Un resorte unido al techo a través de un acople rígido sin fricción en un extremo y un cuerpo de masa M en el otro.



(***A***) Resorte en su longitud original. (***B***) Masa acoplada en equilibrio. (***C***) Con su masa acoplada fuera del equilibrio.

Las fuerzas que actúan en equilibrio sobre el bloque de masa M son: La fuerza de restitución de Hooke, (vertical hacia arriba), y su peso (vertical hacia abajo). Si la constante elástica del resorte es K, entonces la posición de equilibrio está dada por:

$$\delta = \frac{Mg}{K},$$

en donde g corresponde al valor de la aceleración gravitacional. En la situación (C), el bloque se encuentra por fuera de su posición de equilibrio a una distancia y, y su dinámica es descrita por la expresión:

$$+K(\delta + y) - Mg = -Ma,$$

en donde el movimiento resultante se ejecuta hacia abajo (en ese instante de tiempo) y la acción del resorte consiste en generar una fuerza vertical positiva de magnitud $K(\delta + y)$. Resolviendo para y, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para la posición del cuerpo en función de su distancia con respecto a su posición de equilibrio:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0; \qquad \omega = \sqrt{K/M}.$$

La solución de esta ecuación es: $y = y_0 \cos(\omega t)$, en donde y_0 corresponde al desplazamiento inicial del resorte (medida desde el punto de equilibrio) en el instante $t = 0$, *antes de ser liberado*. Claramente, el bloque está sometido a un movimiento periódico con frecuencia ω y amplitud y_0. La solución general asociada a la dinámica del M.A.S puede extenderse a otros sistemas físicos de carácter mecánico y/o electromagnético. Algunos ejemplos son ilustrados en la siguiente tabla:

ALGUNOS SISTEMAS QUE EXHIBEN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Sistema	Ecuación de Movimiento	Frecuencia de Oscilación
Péndulo Simple l, θ	$l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$ $g -$ Aceleración gravitacional. $l -$ Longitud del hilo.	$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
Péndulo de Torsión l, I	$I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -\kappa\varphi$ φ —Ángulo de deformación del hilo. I — Momento de Inercia del disco acoplado. κ —Coeficiente de torsión del hilo.	$\omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}}$
Circuito LC C, L	$L\dfrac{d^2Q}{dt^2} = -\dfrac{1}{C}Q$ Q —Cantidad de carga acumulada en el condensador. (Coulomb, C). L — Inductancia de la bobina (Henrios,H) C — Capacitancia (Faradios, F).	$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

Péndulo Físico l, θ, CM, F, mg	$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta$$ $\theta -$ Ángulo de desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio. $I -$ Momento de Inercia del cuerpo con respecto al eje de giro. $g -$ Aceleración gravitacional. $m -$ Masa del cuerpo. $l -$ Distancia eje-CM.	$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$
Tubo en forma de U, *sección transversal uniforme.*	$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\rho gSy$$ $y -$ Desplazamiento del nivel del líquido con respecto a la posición de equilibrio. $\rho -$ Densidad del líquido. $g -$ Aceleración gravitacional. $m -$ Masa del líquido. $S -$ Sección transversal del tubo.	$\omega = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}}$

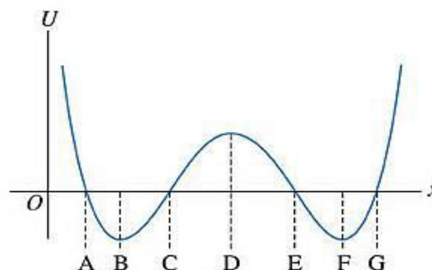
1.3 Consideraciones Energéticas Generales para un Movimiento Periódico Unidimensional

La energía E de una partícula de masa M se determina a partir de los valores iniciales de la posición $x(0)$ y la velocidad $\dot{x}(0) = v(0)$. El movimiento subsecuente está definido clásicamente a partir del principio de conservación de la energía: $E = K_C + U(x)$, en donde $K_C = Mv^2/2$ corresponde a la energía cinética de la partícula y U su energía potencial. La velocidad de la partícula en cualquier posición x es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M}(E - U(x))},$$

en una región en donde la energía total es mayor o igual a la energía potencial.

Los puntos de retorno x_i están definidos matemáticamente por $U(x_i) = E$. Sin pérdida de generalidad, es posible analizar el caso en el cual la energía total es cero ($E = 0$).
La gráfica ilustra dos regiones permitidas identificadas con los valores límite entre **A-C**, y **E-G**, mientras que en la región **CDE** el movimiento es clásicamente no permitido.



En la región **A-C** se identifica un valor mínimo de energía potencial en **B**, el cual corresponde a un valor en equilibrio de la partícula en donde la fuerza neta sobre la misma es cero. A este punto se le denomina *punto de equilibrio estable*. El tiempo que tarda una partícula en recorrer desde **A** hasta **C**, liberada en inicialmente en **A**, se obtiene desde la expresión:

$$t_{A\to C} = \int_A^C \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}(-U(x))}};$$

es decir, una vez la función de energía potencial es conocida, es posible estimar el tiempo de recorrido entre dos posiciones de retorno. Dado que **B** corresponde a un mínimo de energía potencial, cualquier desplazamiento alrededor de este mínimo producirá una fuerza que tiende a llevar la partícula de nuevo a este punto de equilibrio. Se configura de esta manera un movimiento oscilatorio con un periodo de oscilación $T = 2t_{A\to C}$. En el caso general, con $E \neq 0$ y $E > U$, el tiempo de recorrido entre los puntos de retorno es:

$$t_{A\to C} = \int_A^C \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}(E - U(x))}}.$$

Ilustremos el caso en el cual la energía total del sistema está definida por $E = M\omega^2 A^2/2$ y la energía potencial es $U(x) = M\omega^2 x^2/2$. Los puntos de retorno están dados por $x = \pm A$. Reemplazando en la integral anterior, demostramos que el tiempo que necesario que tomará

una partícula en viajar entre dos puntos de retorno es la mitad del periodo de oscilación e independiente de la masa:

$$t_{-A\to+A} = \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}(E-U(x))}} = \frac{1}{\omega}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

EJEMPLOS: OSCILACIONES ARMÓNICAS

1.1 *Función cinemática I.* Una partícula está situada en el extremo de un oscilador que pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de 2 mm/s. La amplitud es de 1 mm. Cuál es la frecuencia y el periodo de vibración? Escribir la ecuación que exprese su desplazamiento en función del tiempo.
R. La frecuencia de oscilación se obtiene desde los datos: $v_{max} = \omega A$, $\omega = v_{max}/A = 2$ rad/s, o 0.318 Hz. El desplazamiento puede expresarse como $x(t) = 0.001\cos(2t)$ m.

1.2 *Función cinemática II.* La punta de una aguja de una máquina de coser se mueve con M.A.S. a lo largo del eje X con una frecuencia de 2.0 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son 1.1 cm y 8.5 cm/s. a) Calcule la componente de aceleración de la aguja en $t = 0$. b) Escriba las expresiones para las componentes de la posición, velocidad y aceleración de la punta en función de t.
R. (a) En cualquier instante de tiempo, se cumple que para un M.A.S $a = -\omega^2 x$. Si $\omega = 4\pi$ r/s, (12.56 r/s), la aceleración en $t = 0$ es: $a = -\omega^2 x = -(12.56)^2(1.1\times10^{-2}) = 1.73$ m/s^2. (b) La fase inicial se obtiene de la fórmula [considerando $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$]

$$\tan\phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)}, \qquad \phi = -31.60°.$$

La amplitud por consiguiente es: $A = x(0)/\cos\phi = 1.29$ cm. La posición en función del tiempo es $x(t) = 0.0129\cos(12.56t - 31.6°)$ cm, mientras que su velocidad instantánea es $v(t) = -0.162\sin(12.56t - 31.6°)$ cm/s y su aceleración $a(t) = -2.04\cos(12.56t - 31.6°)$ cm/s^2.

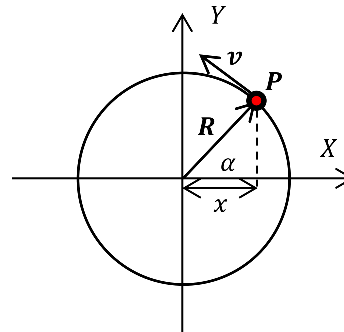
1.3 *Función cinemática III.* Completar la siguiente tabla, con $\omega = 1$ r/s, y $A = 1$ m.

$\boldsymbol{x(m)}$	$\boldsymbol{v\ (m/s)}$	$\boldsymbol{a(m/s^2)}$
		½
	0	
¼		

R.

$x(m)$	$v\ (m/s)$	$a(m/s^2)$
$-½$	$\pm\sqrt{3}/2$	½
± 1	0	∓ 1
¼	$\pm\sqrt{15}/4$	-¼

1.4 *Movimiento circular y M.A.S.* Un punto se mueve en un círculo con velocidad constante de 50 cm/s. El periodo de un viaje completo alrededor del círculo es 6 s. En t = 0 la línea al punto desde el centro del círculo tiende un ángulo de 30° con respecto al eje X. (a) Obtener una ecuación de la coordenada X del punto como función del tiempo, en la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, proporcionando valores de A, ω y α. (b) Hallar los valores de x, v y a en $t = 2$ segundos.



R. (a) El radio del círculo es $R = v/\omega = vT/2\pi = 3/2\pi$ m, $x(t) = (3/2\pi)\cos(\pi t/3 + \pi/6)$ m. (b) En el instante $t = 2$ s, $x(2) = -3\sqrt{3}/(4\pi)$ m, $v(2) = 1/4$ m/s, $a(2) = \sqrt{3}\pi/12$ m/s^2, mientras que la aceleración instantánea es $a(t) = -(\pi/6)\cos(\pi t/3 + \pi/6)$ m/s^2

PR 1.1. Una partícula acoplada en un extremo de un resorte oscila con un periodo de 0.5 s. la partícula es remplazada por otra con el doble de la masa de la inicial. Cuál es el nuevo periodo?

R. El periodo de un sistema masa resorte depende la masa como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

Al duplicar la masa, el periodo cambia incrementándose en un factor de $\sqrt{2}$. El nuevo periodo es 0.707 s. La constante elástica no cambia en este caso.

PR 1.2. El péndulo de Foucault consiste en una esfera de bronce de 115.4 kg suspendida de un alambre de 22.25 m. Cuál es el periodo de éste péndulo?
R. en este caso, el periodo sólo dependería de la longitud del hilo:

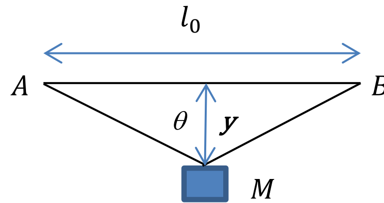
$$T = 2\pi\sqrt{L/g} = 9.467 \text{ s.}$$

Utilizaremos ahora la corrección del cuerpo rígido. Considerando la densidad del bronce como 8.4 gr/cm³, el volumen la esfera maciza y uniforme de bronce es de unos 13738.1 cm³ y su radio medio de 14.86 cm. Despreciando la masa del cable que soporta la esfera, La inercia con respecto a un punto ubicado a 22.25 +0.1486 m =22.4 = L' m es ML'^2. El periodo del péndulo del cuerpo rígido es: $I^0 = 2Mr^2/5 + ML'^2$. El centro de masa coincide con la distancia al centro de la esfera en este caso.

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I^0}{MgL'}} = 9.4994 \text{ s.}$$

La corrección de cuerpo rígido es menor al 0.34% sobre el resultado de la aproximación del péndulo simple.

1.5 *Un hilo* sin deformar de longitud l_0 se extiende una distancia $10^{-3}l_0$ cuando cierta masa se cuelga de su extremo inferior. Si el mismo alambre se conecta entre dos puntos A y B separados una distancia l_0 en el mismo nivel horizontal, y si la misma masa se cuelga en el punto medio del alambre, como se ilustra en la figura, calcular la distancia y del punto medio y la tensión en el alambre.



R. Es posible estimar la constante elástica del hilo desde la información inicial:

$$K = \frac{Mg}{10^{-3}l_0}.$$

La masa del cuerpo es desconocida, sin embargo, el resultado final será descrito en términos de la longitud original l_0. El cambio en la energía potencial del cuerpo es:

$$\Delta U = Mgy,$$

que debe ser igual al trabajo realizado por la tensión del hilo al deformarse una distancia $d\boldsymbol{l}$:

$$W = \int_0^y \boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^y T_Y dY = \int_0^y 2K\Delta\cos\theta\, dY,$$

en donde la deformación del hilo a una distancia Y desde su posición original AB es:

$$\Delta = 2\sqrt{Y^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} - l_0,$$

mientras que el coseno del ángulo puede estimarse como:

$$\cos\theta = \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2}}.$$

La integral resultante es:

$$W = \int_0^y 2K\left(2Y - l_0\frac{Y}{\sqrt{Y^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2}}\right)dY = 2Ky^2 + K{l_0}^2 - Kl_0\sqrt{4y^2 + {l_0}^2}.$$

Reemplazando *K:*

$$W = 2\times 10^3\frac{Mg}{l_0}y^2 + 1000Mgl_0 - 10^3 Mg\sqrt{4y^2 + {l_0}^2}.$$

Al igualar el trabajo mecánico realizado por la tensión con el cambio en la energía potencial del cuerpo, tendremos:

$$y = 2\times 10^3\frac{y^2}{l_0} + 10^3 l_0 - 10^3\sqrt{4y^2 + l_0^2},$$

cuya solución para la distancia vertical es:

$$y = 0.079703l_0,$$

alrededor del 8% de la longitud original del cable. La tensión del alambre en esta posición de equilibrio estático se aproxima a:

$$T = \frac{Mg}{2\cos\theta} = \frac{Mg}{2y}\sqrt{y^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = \frac{Mg}{2\times 0.0797l_0}\times 0.5063l_0 = 3.17Mg.$$

Nótese que en el cálculo de la distancia y se ha realizado de forma exacta, sin tener en cuenta los límites usuales de deformaciones pequeñas, aunque hemos considerado que la tensión del hilo responde "linealmente" según la ley de Hooke. El ángulo subtendido del hilo con respecto a la vertical en el punto de sujeción del cuerpo para este caso es alrededor de 80.94°.

1.6 *Un punto* se mueve de modo que su desplazamiento a partir del origen en cualquier instante esté dado por: $x(t) = (3\text{cm})\sin(2\pi ft) + (4\text{cm})\cos(2\pi ft)$. Cuál es la amplitud de movimiento del cuerpo?
R. La ecuación anterior puede escribirse también como (utilizando la identidad trigonométrica $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\,[\sin(x+y)]$, $\tan y = B/A$):

$$x(t) = (5\text{cm})\sin(2\pi ft + 53.13°).$$

La amplitud de movimiento resultante es 5 cm.

1.7 *Un objeto* de 1 g de masa cuelga de un resorte y exhibe movimiento oscilatorio. En $t = 0$ el desplazamiento es 43.785 cm y la aceleración es -1.7514 cm/s². Cuál es la constante del resorte?
R. En cualquier instante de tiempo, éste sistema obedece la relación $a = -\omega^2 x$. La frecuencia de vibración del objeto es: $\omega = 1/5$ (r/s). La constate elástica es $K = M\omega^2 = 4 \times 10^{-5}$N/m.

1.8 *La escala de una balanza* de resorte señala de 0 a 10 kg y tiene 25 cm de longitud. Un cuerpo suspendido de ella tiene un periodo de vibración de 0.8 s. Cuál es la masa del cuerpo?



R. El periodo de oscilación de un sistema masa resorte es: $T = 2\pi\sqrt{M/K}$. En equilibrio, $Mg = K\delta$ en donde δ es la deformación del resorte, la cual se puede calcular como:

$$\delta = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 15.6 \text{ cm.}$$

Cuando la deformación es máxima, $K = W'/d$ en donde $W' = 10 \times 9.8$ (N) y $d = 25$ cm. En este caso $K = 392$ (N/m). La masa es:

$$M = \frac{W'T^2}{4\pi^2 d} = 6.24 \text{ kg.}$$

1.9 *M.A.S.* Cuando el desplazamiento es de 6 cm, la velocidad es de 16 cm/s; cuando el desplazamiento es de 8 cm, la velocidad es de 12 cm/s. Hállese la amplitud y el periodo de movimiento.

R. Utilizamos $v_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2)$ y $v_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2)$. Al restar estas dos expresiones, eliminamos el factor A y obtenemos la frecuencia de oscilación:

$$v_2^2 - v_1^2 = \omega^2(x_1^2 - x_2^2);$$

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} = \sqrt{\frac{12^2 - 16^2}{6^2 - 8^2}} = 2\ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

El periodo es π s. La amplitud se calcula reemplazando en cualquiera de las expresiones anteriores:

$$A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2} = \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{v_2}{\omega}\right)^2} = 10 \text{ cm.}$$

1.10 *Un oscilador armónico Masa-Resorte* con $K = 23$ N/m y $M = 0.47$ kg tiene una energía mecánica de 25 mJ. (a) Cuál es la amplitud de movimiento? (b) Cuál es la máxima velocidad del bloque? (c) Cuál es la velocidad del bloque cuando $x = 11$ mm? (d) Cuál es la distancia del bloque al centro cuando la magnitud de su velocidad es de 0.25 m/s?

R. (a) $E = \frac{1}{2}KA^2$; $A = \sqrt{\frac{2E}{K}} = 0.047$ m (47 mm). (b) $v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{K}{M}}A = 0.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(c) $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0.319\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (d) $x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} = \pm 0.030$ m.

1.11* *Una plataforma* está ejecutando movimiento armónico simple en dirección vertical con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 10/π vibraciones por segundo. Un bloque es colocado sobre la plataforma en el punto más bajo de su trayectoria. (a) En qué punto abandonará el bloque la plataforma? (b) Que tan alto se elevará el bloque por encima desde el punto más alto de la trayectoria?

R. (a) El bloque tiende a abandonar el sistema de la plataforma cuando su energía cinética sea mayor o igual a su energía potencial gravitacional:

$$\frac{1}{2}Mv^2 \geq Mgy,$$

tomando y como el punto más bajo de la trayectoria. El cuerpo gana altura y se desplaza a la misma velocidad del sistema mientras esté acoplado al mismo: $v = \omega\sqrt{A^2 - (A - y)^2} = \omega\sqrt{y(2A - y)}$. Resolviendo para la coordenada y, el bloque estará en contacto con la plataforma hasta la posición:

$$y = 2A - \frac{2g}{\omega^2}.$$

Tomando $g = 9.8$ m/s², $y = 0.051$ m. (b) La velocidad en ese punto es ωA y la altura alcanzada desde esa posición es $h_0 = v_0^2/2g = 0.051$ m. Desde el punto más alto de la trayectoria de la plataforma, el bloque se elevaría por unos 2 mm.

1.12 *Péndulo Simple.* El péndulo de un reloj tiene un periodo de $T = 2$ segundos cuando $g = 9.8$ m/s². Si su longitud se aumenta en 1 mm. ¿Cuánto se habrá atrasado el reloj después de 24 horas?

R. Si el periodo del péndulo es $T = 2$ segundos, su longitud es: $L = gT^2/4\pi^2 = 0.9929$ metros, o 992.95 mm. Si su longitud aumenta en un milímetro, $L' = 993.95$ mm, su nuevo periodo es 2.0010 segundos. En 24 horas el péndulo original habrá realizado unas 43,200 oscilaciones, mientras que el péndulo con longitud mayor ejecutará unas 43,178 en el mismo lapso de tiempo. La diferencia del número de oscilaciones es aproximadamente 21.6, y si cada oscilación corresponde a 2.0010 segundos, el reloj se atrasará **43.2 segundos** por día.

1.13 *Péndulo Simple.* Deducir una fórmula para la velocidad máxima v_0 de la pesa de un péndulo en términos de g, su longitud L y el ángulo máximo de oscilación θ_0.

R. La rapidez lineal máxima de una pesa acoplada a un péndulo es $v_0 = \omega L\theta_0$,

En donde $L\theta_0$ es la amplitud de oscilación (θ_0 calculado en radianes). Reemplazando ω, obtenemos la relación requerida:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} L\theta_0 = \sqrt{gL}\theta_0.$$

1.14 *Dilatación.* Suponiendo que la longitud de un péndulo simple aumenta un 2% por efecto de dilatación térmica, calcúlese el porcentaje en el que se modifica su periodo. Si el periodo de un péndulo típico de reloj de 1 m de longitud es aproximadamente 2 segundos y si éste se dilata en un 2%, en cuánto tiempo se habrá atrasado el reloj en un lapso de cuatro horas?

R. Evidentemente, la *nueva* longitud del péndulo es $1.02L$, y el periodo se modificaría en

$$T' = \sqrt{1.02}T = 1.009955T,$$

es decir ~0.9955% de su periodo original. Al péndulo le toma 0.01999 *segundos* adicionales en completar su recorrido. En cuatro horas existirán unos 7200 ciclos para un péndulo típico de 1 m de longitud, mientras que para el péndulo afectado por los efectos térmicos existirá una diferencia de unos 143.9 segundos (~2.4 minutos).

1.15 *Un péndulo en la Luna.* En la Tierra, cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. Qué periodo tendrá en la luna, en donde $g = 1.60 \text{ m/s}^2$?

R. De la fórmula de péndulo simple, comparamos los dos periodos para un péndulo con longitud constante:

$$\frac{T_{Luna}}{T_{Tierra}} = \sqrt{\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}}}.$$

Reemplazando los valores numéricos, con $g_{Tierra} = 9.8 \text{ m/s}^2$, $T_{Luna} = 3.95$ s.

1.16 *Un péndulo simple* de 0.55 m de longitud se mueve 7° hacia un lado y se libera. Cuánto tarda la pesa del péndulo en alcanzar su rapidez máxima?

R. La ecuación para la posición angular del péndulo en función del tiempo puede escribirse como:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t),$$

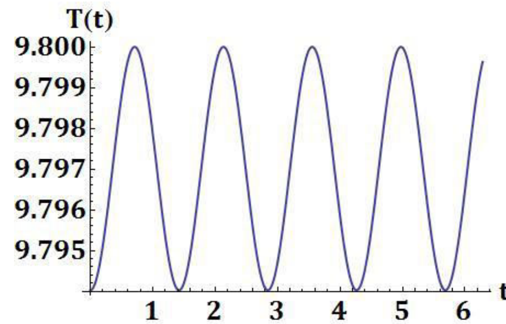
con $\omega = 2\pi/T$. La pesa del péndulo alcanzará su rapidez máxima cuando ésta pase por su posición de equilibrio: $\theta(t^*) = 0$. En este caso: $\cos(\omega t^*) = 0$, y el tiempo más corto en el cual esto sucede es:

$$t^* = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4} = 0.37 \text{ s}.$$

Nótese que este resultado **NO** depende de la amplitud inicial del péndulo.

1.17 *Un péndulo cuya* longitud es de 2 m está situado en un lugar en donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. El péndulo oscila con una amplitud de 2°. Expresar, en función del tiempo: (a) el desplazamiento angular, (b) la velocidad angular, (c) la aceleración angular, (d) la velocidad lineal, (e) la aceleración centrípeta y (f) la tensión en la cuerda si la masa en su extremo es 1 kg.

R. (a) la frecuencia angular de movimiento es $\omega = \sqrt{g/l} = 2.21$ r/s y su desplazamiento angular se describe como: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$. (b) $\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0 \sin(\omega t)$, (c) $\alpha(t) = -\omega^2\theta(t)$, (d) $v(t) = -l\omega\theta_0 \sin(\omega t)$, (e) $a_C(t) = v(t)^2/l$, (f) $T(t) = Mg\cos\big(\theta(t)\big) = Mg\cos(\theta_0\cos(\omega t))$.



La gráfica adjunta ilustra la variación de la tensión (N) en función del tiempo (s) para los datos suministrados en el problema. Se observa una variación armónica con un cambio aproximado máximo de 0.005 N.

1.18 *Colisión Inelástica y M.A.S.* Una bala de 0.0125 kg golpea un bloque de 0.300 kg acoplado a un resorte horizontal fijo cuya constante elástica es 2.25×10^3 N/m y produce una vibración con una amplitud de 12.4 cm. Cuál era la velocidad de la bala si los dos objetos se mueven juntos después del impacto?

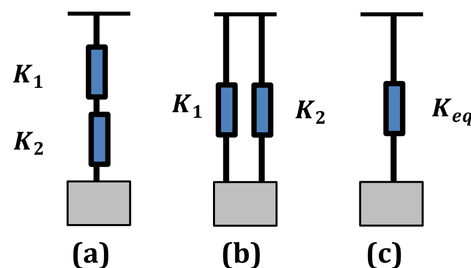
R. Considerando que no existe fricción entre la superficie de la mesa y el bloque, tendremos que la energía **total** del sistema, después de la colisión es: $E_{total} = KA^2/2 = 17.3$ J. Esta energía debe ser igual a la energía cinética máxima del sistema bloque-masa. En esta última relación se puede calcular la velocidad máxima de oscilación: $(M+m)V^2/2 = E_{total}$, en donde $V = 10.52$ m/s. La velocidad de la bala v, justo antes de impactar el bloque se obtiene desde el principio de conservación del *momentum*:

$$mv = (M+m)V,$$

o en forma equivalente:

$$v = \frac{(M+m)}{m}V = 263\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

1.19 *Sistemas equivalentes masa-resorte.* Calcular la frecuencia de oscilación para las diferentes configuraciones de los sistemas masa-resorte.



R. La frecuencia de oscilación se puede calcular reduciendo las situaciones **(a)** y **(b)** a un caso genérico **(c)**, con una constante efectiva K_{eq}: $\omega = \sqrt{K_{eq}/M}$. Para el caso **(a)**, la constante de restitución equivalente del sistema es:

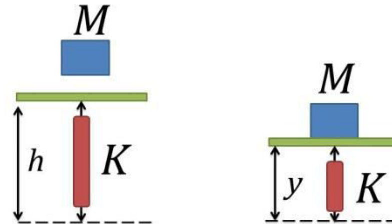
$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2},$$

dado que la fuerza neta aplicada es la misma en todos los puntos sobre los resortes acoplados en serie, mientras que en el caso **(b)** la fuerza neta es la suma de las fuerzas individuales y la constante efectiva es:

$$K_{eq} = K_1 + K_2.$$

Si las constantes son idénticas, se demuestra que la frecuencia de oscilación en el caso (b) es mayor que en el caso (a) en un factor de 2.

1.20 *Un cuerpo de masa M* se ubica cuidadosamente sobre una plataforma acoplada a un resorte de constante elástica K, inicialmente en equilibrio a una altura h desde cierto nivel de referencia. Una vez sobre la plataforma, el cuerpo empieza a comprimir lentamente el resorte hasta alcanzar un nuevo punto de equilibrio. Obtener (a) la nueva posición de equilibrio del sistema cuerpo-plataforma y. (b) la energía potencial elástica adquirida por el resorte cuando el cuerpo llega alcanza la posición y.



R. El principio de conservación de la energía conduce a: $Mgh = Mgy + \frac{1}{2}K(h-y)^2$. La solución para la nueva posición de equilibrio es: $y = h - 2Mg/K$. (b) La energía potencial elástica adquirida por el resorte es:

$$U = \frac{1}{2}K(h-y)^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{2Mg}{K}\right)^2 = \frac{2(Mg)^2}{K}.$$

1.21 *Una partícula* se desliza hacia adelante y hacia atrás entre dos planos inclinados y sin fricción. (a) Encontrar el periodo del movimiento si h es la altura inicial. (b) Es el movimiento oscilatorio? (b) Es armónico simple?



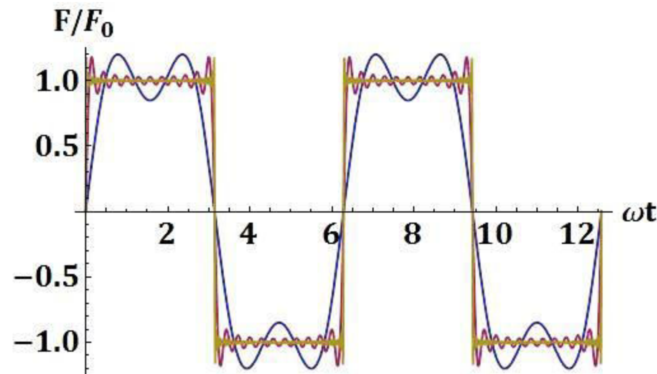
R. El movimiento es uniformemente acelerado, con aceleración $a = g\sin\alpha$. El tiempo que le toma a la partícula en recorrer la posición más alta del plano y su base es: $t = \sqrt{2l/a}$, en donde l es la longitud de la diagonal del plano $l = h/\sin\alpha$. El tiempo que tarda en llegar a la posición de mayor altura en el segundo plano es el doble de t: $t' = 2t$

$$t' = 2\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}},$$

mientras que el periodo de movimiento es el doble de este último valor: $T = 2t'$. (b) Si. (c) No es M.A.S. La fuerza de restitución NO es proporcional al desplazamiento de la partícula.

1.22 *Aplicación de la segunda ley de Newton.* Una partícula de masa M está sometida a una fuerza tipo onda cuadrada. La fuerza es constante en magnitud pero invierte su dirección en intervalos regulares de π/ω. Esta fuerza puede representarse por la serie:

$$F(t) = F_0\left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots +\right) = F_0\left(\frac{4}{\pi}\right)\sum_{j=0}^{N}\frac{\sin[(2j+1)\omega t]}{(2j+1)}$$



Gráfica de la función Onda cuadrada, construida desde los armónicos impares de Fourier, para $N = 1$(línea azul), $N = 10$ (línea roja) y $N = 100$ (línea dorada).

(a) Escribir la ecuación del movimiento de la partícula.
(b) Verificar, por sustitución directa que su solución puede escribirse como $x(t) = a + bt + A\sin(\omega t) + B\sin(3\omega t) + C\sin(5\omega t) + \cdots +$ en donde a y b son constantes arbitrarias, y determinar los valores de los coeficientes A, B, C de modo que la ecuación de movimiento se satisfaga.

R. (a) La ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{M}.$$

(b) Al derivar dos veces la función de prueba asociada a la posición del objeto, se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t) - 9\omega^2 B\sin(3\omega t) - 25\omega^2 C\sin(5\omega t) + \cdots +$$

Esta forma es idéntica a $F(t)/M$ si sólo si las constantes A, B y C cumplen:

$$A = -\frac{4F_0}{\pi M\omega^2};\ B = -\frac{4F_0}{27\pi M\omega^2};\ C = -\frac{4F_0}{125\pi M\omega^2}.$$

1.23 *Péndulo Físico.* Una barra delgada tiene una masa M y una longitud L = 1.6 m. Uno de los extremos de la barra se sujeta en un pivote fijo y ésta oscila alrededor del pivote con oscilaciones pequeñas. (a) Encuentre la frecuencia de estas oscilaciones. (b) Si se agrega una partícula de masa M al extremo final de la varilla, ¿en qué factor cambiará el periodo?

R. Hallamos el momento de inercia de la barra:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = M\frac{L^2}{3}.$$

a) Frecuencia.

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} = 3.031\ s^{-1}.$$

b) Periodo T, con un momento de inercia que cambia debido a la masa M agregada.

$$I = M\frac{L^2}{3} + ML^2 = \frac{4}{3}ML^2.$$

El periodo de oscilación del sistema es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M'gD'}} = 2\pi\sqrt{\frac{16L}{18g}} = 2.394\ s$$

El periodo del péndulo, con la masa agregada en el extremo, cambia en un factor de $2/\sqrt{3}$ (1.1547).

PR 1.3. Una partícula de 120 g unida a un resorte de 12 N/m tiene una posición de equilibrio en $x = 0$. Si $x = 0.15$ cm en $t = 0$ y $x = -0.045$ cm en $t = 0.22$ s, hallar la posición en función del tiempo.

R. La solución general para la posición del cuerpo que experimenta M.A.S. se puede escribir como:

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \theta).$$

La frecuencia de oscilación del cuerpo es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = 1.59\ \text{Hz}.$$

En $t = 0,\ 0.15 = A\cos(\theta)$. En $t = 0.22\ s$,

$$-0.045 = A\cos(2.2 + \theta).$$

La solución que satisface la condición de $A > 0$ para el ángulo de fase es: $\theta = -0.343$ rad. La amplitud de oscilación es $A = 0.1593$ cm. La posición en función del tiempo es:

$$x(t) = 0.1593\cos(10t - 0.343)\ \text{cm}.$$

1.24 *Movimiento Armónico Simple I.* Una partícula cuya masa es de 1 g vibra con movimiento armónico simple de 2 mm de amplitud. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de 8×10^{-3} m/s^2. Calcular la frecuencia del movimiento y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de 1.2 mm. Escribir la ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre la partícula en función de la posición y del tiempo.

R. La frecuencia de movimiento es constante (positiva) y se obtiene desde la relación:

$$|a_{max}| = \omega^2 A;\ \omega = \sqrt{|a_{max}|/A} = 2\ \text{r/s}.$$

La velocidad de la partícula es máxima cuando ésta pasa por su posición de equilibrio:
$|v_{max}| = \omega A = 4$ mm/s, mientras que cuando la elongación del resorte es 1.2 mm, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2 \times \sqrt{(2)^2 - (1.2)^2} = 3.2$ mm/s. La fuerza que experimenta la partícula en función del tiempo es (con fase inicial cero):
$F(t) = ma(t) = -0.001 \times (0.008)\cos(2t)$ (N)

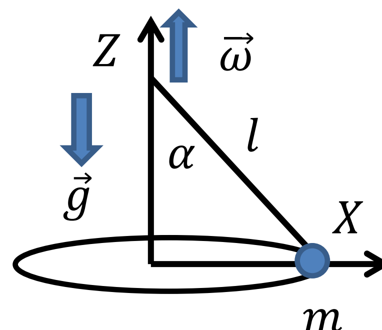
$F(t) = -8\cos(2000t)$ (μN).
En función de la posición:
$F(x) = -m\omega^2 x = -0.001 \times (2)^2 x = -0.004x$ (N); x en metros.

1.25 *Movimiento Armónico Simple II.* Un cuerpo de masa 10 gramos ejecuta Movimiento Armónico Simple de amplitud 24 centímetros y periodo de 4 segundos. La posición del cuerpo a $t = 0$ es $x = +24$ cm. Calcular: (a) La posición del cuerpo en el instante $t = 0.5$ s. (b) La magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando $t = 0.5$ s. c) El tiempo mínimo necesario que toma el cuerpo en alcanzar la posición $x = -12$ cm.
R.
(a) La posición del cuerpo está dada por la fórmula (según la condición inicial): $x(t) = A\cos(\omega t) = 0.24\cos(0.5\pi t)$. La posición del cuerpo en 0.5 segundos es: 0.1697 m (16.97 cm).
(b) En ese instante de tiempo ($t = 0.5$ s), la aceleración del cuerpo es $a = -\omega^2 x = -(2\pi/T)^2 x = -0.418\ \mathrm{m}/s^2$. La magnitud de la fuerza que actúa sobre el cuerpo es $F = ma = 4.18 \times 10^{-3}$N y la dirección de la fuerza resultante es en el sentido negativo de las X.
(c) El tiempo (mínimo) necesario para alcanzar la posición $x = -12$ cm resulta de la solución de la ecuación: $x(t) = -0.12 = 0.24\cos(0.5\pi t)$.

$$0.5\pi t = \cos^{-1}\left(-\frac{0.12}{0.24}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

De esta última expresión, $t = 4/3$ s (1.33 segundos). Este tiempo es mínimo ya que su valor es menor que el valor de un periodo de oscilación, i.e., el cuerpo alcanza la posición x=-12 cm en 1.33 segundos inmediatamente *después* de ser liberado.

1.26 *Péndulo Cónico.* La figura adjunta muestra un péndulo cónico en el que la plomada, al oscilar, describe una circunferencia horizontal en el plano XY. Obtener una expresión para la frecuencia de movimiento.



R. El radio de giro del péndulo en el plano es, según la geometría del sistema: $R = l\sin\alpha$. Si la plomada gira con velocidad angular ω, entonces la fuerza centrípeta debe igualar a la componente de la tensión en el plano XY:

$$T\sin\alpha = m\omega^2 R; \quad T = m\omega^2 l.$$

Sobre el eje Z se cumple: $T\cos\alpha = mg$. La frecuencia de giro en función del ángulo del cono se obtiene como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

La amplitud de movimiento en el plano XY es R. Las componentes de movimiento pueden obtenerse como: $X(t) = R\cos(\omega t)$, $Y(t) = R\sin(\omega t)$, mientras que el periodo de giro es: $P = 2\pi/\omega$.

1.27* *Péndulo en un ascensor.* Obtener una expresión general para el periodo de un péndulo simple sometido a una aceleración uniforme $\boldsymbol{a}$.
R. El periodo de un péndulo simple cambia si éste experimenta una aceleración diferente a la gravitacional g. El *peso aparente* W' de la masa M del péndulo cambia así:

$$W' = M(g + a) \text{ aceleración } a \text{ en sentido contrario a } g.$$

$$W' = M(g - a) \text{ aceleración } a \text{ en igual sentido a } g.$$

La gravedad efectiva a la cual está sometido el péndulo es: $g_{eff} = g \pm a$, y el periodo se modifica como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{eff}}}.$$

Si un ascensor se desploma en caída libre, el periodo del péndulo acoplado a éste es infinito. El periodo disminuye si el elevador *sube* con aceleración $+a$.

1.28 *Cálculo de la constante elástica.* Se conecta un deslizador de riel de aire de 0.30 kg al extremo de un resorte ideal de masa insignificante. El sistema oscila con una frecuencia tal que el tiempo entre la primera vez que el deslizador pasa por su posición de equilibrio y la segunda es de 1.48 s. Determine la constante de fuerza del resorte.
R. La constante se obtiene de la fórmula $K = M\omega^2$. La frecuencia de oscilación se puede calcular desde el periodo, o el tiempo que tarda el deslizador en recorrer un ciclo completo. En este caso, ese periodo es dos veces el tiempo mencionado: $T = 2 \times 1.48 = 2.96$ s. La frecuencia es por lo tanto: 2.12 r/s y la constante de fuerza $K = 1.35$ N/m.

1.29 *Una placa horizontal oscila* con M.A.S. con una amplitud de 1.5 m y una frecuencia de 15 oscilaciones por minuto. Calcular el mínimo valor del coeficiente de fricción con el fin de que un cuerpo colocado sobre la placa no resbale cuando ésta se mueve.
R. La aceleración máxima que experimentará el cuerpo sobre la placa sin perder contacto con ésta es:

$$a_{máx} = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A$$

El coeficiente de fricción estático μ_S se obtiene de la condición de equilibrio: $\mu_S N = \mu_S Mg = Ma_{máx}$,

$$\mu_S = \frac{4\pi^2 f^2 A}{g} = 0.375.$$

1.30 *Sistema Bloque-Resorte.* Considere un oscilador armónico simple tipo bloque-resorte con $K = 200$ N/m y $M = 2.4$ kg. Las condiciones iniciales del oscilador son $X_0 = 0.15$ m y $v_{X0} = 0.45$ m/s. Determine la posición del bloque en $t = 3.0$ s.
R. Partimos de la expresión general que corresponde a la solución del M. A. S. para la posición:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

mientras que la función de velocidad es: $v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$.

Las condiciones iniciales conducen a: $X_0 = A\cos(\varphi)$, $v_{X0} = -\omega A\sin(\varphi)$ y el ángulo de fase es:

$$\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{v_{X0}}{\omega X_0}\right).$$

La amplitud de oscilación en función de X_0, v_{X0} toma la forma:

$$A = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_{X0}^2}{\omega^2}},$$

y la solución completa se escribe como:

$$X(t) = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_{X0}^2}{\omega^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{v_{X0}}{\omega X_0}\right)\right), \qquad \omega = \sqrt{K/M}.$$

Numéricamente: $\omega = 9.13$ r/s, $A = 0.16$ m, $\varphi = -18.19°$. En $t = 3$ s, $X(3) = -0.0577$ m.

1.31 *Cálculo de la fase Inicial en un M.A.S.* En $t = 0$ el desplazamiento $x(0)$ de un bloque que se mueve con M.A.S. es -8.50 cm. La velocidad del bloque en ese instante es $v(0) = -0.920$ m/s, y su aceleración es $a(0) = +47.0$ m/s². (a) Cuál es la frecuencia angular de este sistema? (b) Cuál es la fase y su amplitud?.
R. (a) $a = -\omega^2 x,\ \omega = \sqrt{-a/x} = 23.51$ r/s. (b) con $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$,

$$x(0) = -0.085 = A\cos\phi,$$
$$v(0) = -0.920 = -A\omega\sin\phi,$$
$$\tan\phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)}, \quad \phi = -24.71°.$$

Amplitud: $A = 0.094$ m.

1.32 *Condiciones Iniciales en un M.A.S.* Un objeto oscila con M.A.S. a una frecuencia de 0.42 Hz. La coordenada inicial es $X_0 = 0.021$ m y la componente de la velocidad inicial es $v_0 = 1.3$ m/s. Determine (a) La amplitud de movimiento, (b) La velocidad máxima y (c) la aceleración máxima del objeto.

R. (a) Utilizamos la solución general para la posición del objeto que oscila con M.A.S:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \phi);$$

y la velocidad en el tiempo es:

$$v(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \phi).$$

La amplitud puede obtenerse desde las condiciones de inicio:

$$X_0 = A\cos\phi, \quad v_0 = -A\omega\sin\phi,$$

$$A = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0.021^2 + \left(\frac{1.3}{2\pi \times 0.42}\right)^2} = 0.493 \text{ m}$$

b) La velocidad máxima es $v_{max} = A\omega = 0.493 \times 2\pi \times 0.42 = 1.30$ m/s.

c) Aceleración máxima: $a_{max} = \omega^2 A = 3.43$ m/s^2.

1.33 *Cálculo del tiempo de recorrido en un M.A.S.* Un objeto ejecuta M.A.S con un periodo $T = 0.6$ s y amplitud A. Inicialmente, el objeto está en $x = 0$ y tiene una velocidad en la dirección positiva. Calcular el tiempo que tarda en ir desde $x = 0$ a $x = A/4$.
R. *Solución 1*. Planteamos la ecuación de posición con estas condiciones:

$$x(t) = A\sin(\omega t).$$

Para $x(t) = A/4$, es necesario resolver

$$\frac{A}{4} = A\sin(\omega t),$$

con $\omega = 10.76$ r/s. Resolviendo: $t = 0.0234833$ s.
Solución 2. Es posible también utilizar la representación integral:

$$t = \int_0^{A/4} \frac{dx}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega}\cot^{-1}\sqrt{15} = 0.0234833 \text{ s}.$$

Nótese que el tiempo requerido para alcanzar la posición $A/4$ **no** cumple una relación de proporcionalidad simple con respecto al periodo de oscilación. El tiempo requerido para alcanzar las posiciones $A/4$, $A/2$, $3A/4$ y A en este problema puede resumirse en la siguiente tabla (T representa el periodo de oscilación):

x	$A/4$	$A/2$	$3A/4$	A
t	$0.04021T$	$T/12$	$0.135T$	$T/4$

En general, para cualquier posición X entre 0 y A, el tiempo que le toma al cuerpo en alcanzar un punto en este rango es, en términos del periodo de oscilación, igual a:

$$t = \frac{T}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{X}{\sqrt{A^2 - X^2}}\right).$$

1.34 *Principio de Conservación de la energía.* Una gran esfera de hierro de 350 kg de masa se encuentra fija en un extremo de un cable de 35 m de longitud. Este sistema se usa con propósitos de demolición. La esfera se coloca a 1 m del lado del edificio, se desplaza 25° y se libera. Cuál es su velocidad al chocar con el edificio?. Qué ángulo se necesita para que la bola choque a 20 m/s?

R. A 1 m de distancia desde el edificio, la velocidad de impacto se obtiene desde el principio de conservación de la energía:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta' - \cos\theta)},$$

en donde $\theta = 25°$ y θ' es el ángulo formado por el cable con respecto a la vertical a 1 m desde el edificio. Relaciones trigonométricas simples conducen a:

$$\sin\theta' = \frac{1}{35}; \;\; \theta' = 1.64°.$$

Reemplazando los valores: $v = 8$ m/s. El ángulo necesario θ para que la velocidad de impacto sea de 20 m/s es: $\theta = 65.39°$.

1.35 *Movimiento Armónico Simple III.* Una partícula cuya masa es de 0.5 kg se mueve con movimiento armónico simple. Su periodo es de 2 s y la amplitud de movimiento es de 12 cm. Calcular la aceleración, la fuerza, la energía potencial y la energía cinética cuando la partícula está a 8 cm de su posición de equilibrio.
R. Aceleración en la posición $x = 8$ cm: $a = -\omega^2 x = -(2\pi/T)^2 x = 0.789$ m/s². (Magnitud). Fuerza (magnitud): $F = Ma = 0.395\ N$. La energía Potencial: $U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 = 0.016\ J$. La energía Cinética: $E_K = Mv^2/2 = E - U = KA^2/2 - U = M\omega^2 A^2/2 - U = 0.01953$ J, en donde E corresponde a la energía mecánica total del oscilador.

1.36 *Movimiento Armónico Simple IV.* Una partícula de 0.5 kg en el extremo de un resorte tiene un periodo de 0.3 s. La amplitud del movimiento es 0.1 m. **a**) Cuál es la constante del resorte? **b**) Cuál es la energía potencial elástica máxima? **c**) Cuál es la velocidad máxima de la partícula?
R.

a) La constante del resorte es $K = M\omega^2 = M(2\pi/T)^2 = 219.3$ N/m.
b) La energía potencial elástica máxima es: $KA^2/2 = 1.1$ J.
c) La velocidad máxima de la partícula se obtiene de la fórmula simple:
$v_{max} = \omega A = 2\pi A/T = 2.1$ m/s.

1.37 *Un reloj*, regulado mediante un péndulo simple, es preciso mientras su temperatura se mantiene fija a 20°C. El péndulo aumenta en su longitud en un 0.0010 por 100 por cada 1.0 °C que aumenta su temperatura, cuál es la temperatura si el reloj se atrasa 2.0 s, un día?
R. En un reloj de péndulo, el periodo (P) de oscilación puede aproximarse a 2.0 segundos en condiciones normales. El número de oscilaciones en un día se aproxima en este caso a 43,200. Si el reloj se ha atrasado 2 segundos, eso significa que ha efectuado una oscilación adicional, es decir, su periodo ha cambiado a 2.000046296 s. Considerando que el periodo es proporcional a $L^{1/2}$, siendo L la longitud del péndulo que depende del cambio de la temperatura ΔT, entonces:

$$P'(T) = P(20°C)\sqrt{1 + 10^{-5}\Delta T},$$

con ΔT en centígrados. Reemplazando los datos, $\Delta T = 4.63$°C. La temperatura de operación del reloj es de 24.63°C.

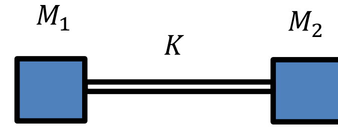
1.38 *Cierto resorte* que obedece la ley de Hooke, se estira 20 cm cuando una masa M se acopla en uno de sus extremos. Cuál es la frecuencia de vibración de la masa si ésta es ligeramente desplazada hacia abajo y luego liberada?
R. Es posible hallar inicialmente una relación de la constante elástica del resorte y el valor de la masa (desconocido), desde la condición de equilibrio:

$$Kd = Mg.$$

La frecuencia de vibración de masa está dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}} = 1.1 \text{ Hz}.$$

1.39 *Concepto de masa reducida.* Dos masas M_1 y M_2 están unidas por un muelle de constante K. El muelle está comprimido inicialmente con ayuda de un hilo. Una vez el hilo se rompe, el sistema oscila con M.A.S. Determine el periodo de estas oscilaciones.



R. Denotamos las posiciones de los cuerpos como X_1 y X_2 con respecto a un punto de referencia. La energía potencial elástica del sistema es: $U(X_1, X_2) = K(X_2 - X_1)^2/2$,

mientras que la fuerza sobre los cuerpos (1) y (2) es:

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial X_1} = K(X_2 - X_1) = M_1 a_1, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial X_2} = -K(X_2 - X_1) = M_2 a_2,$$

en donde a_j corresponde a la aceleración del cuerpo *j.* De la relación $a_j = -\omega^2 X_j$, se obtienen las ecuaciones acopladas:

$$(-\omega^2 M_1 + K)X_1 - KX_2 = 0,$$

$$-KX_1 + (-\omega^2 M_2 + K)X_2 = 0.$$

cuya solución es:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}, \qquad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

en donde μ es la *masa reducida* del sistema. El periodo de oscilación se obtiene utilizando $T = 2\pi/\omega$.

1.40 Un pistón ejecuta movimiento armónico simple vertical con amplitud de 7.0 cm. Un limpiador reposa sobre la parte superior del pistón. Si la velocidad de la máquina aumenta lentamente, a que frecuencia el limpiador perdería el contacto con el pistón?.

R. La máxima aceleración hacia abajo que puede tener el limpiador es la aceleración gravitacional g. Esta aceleración debe ser proporcionada por la máquina para evitar perder el contacto con el limpiador. Si el pistón se acelera hacia abajo más rápido que este valor, el limpiador perderá el contacto. La condición crítica es:

$$g = \omega^2 A,$$

así: $f = (1/2\pi)\sqrt{g/A} = 1.9$ Hz. El limpiador se separará del pistón si éste excede una frecuencia de 1.9 Hz.

1.41 *M.A.S. Acoplados I.* Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son:

$x(t) = 4\sin(\omega t)$, y $y(t) = 3\sin(\omega t + \alpha)$, cuando $\alpha = 0, \pi/2, y\, \pi$. Construir un gráfico de la trayectoria de la partícula en cada caso.

R. **(a)** Cuando $\alpha = 0$,

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{4}; \qquad y = \frac{3}{4}x.$$

La trayectoria es una línea recta que pasa por el origen con pendiente 3/4.
(b) Cuando $\alpha = \pi/2$,

$$\frac{x}{4} = \sin(\omega t);$$

$$\frac{y}{3} = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)\,;$$

combinando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

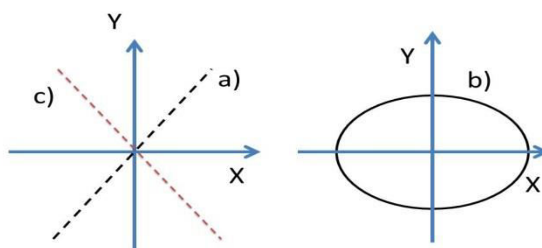
El cual corresponde a una elipse con centro en el origen y semieje mayor 4 y semieje menor 3.
(c) Si $\alpha = \pi$;

$$\frac{x}{4} = \sin(\omega t);$$
$$\frac{y}{3} = \sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)\,;$$

resolviendo:

$$\frac{x}{4} = -\frac{y}{3}, \qquad y = -\frac{3}{4}x.$$

La trayectoria es una línea recta que pasa por el origen con pendiente -3/4.



Representación de las diferentes trayectorias de un cuerpo bajo dos movimientos armónicos perpendiculares y cambio de fase relativa, *M.A.S. acoplados, ejemplo **1.41**.*

1.42 *Un cuerpo de masa 2.5* kg se mueve con M.A.S y ejecuta exactamente 3 vibraciones cada segundo. Calcular la aceleración y la fuerza de restitución que actúa sobre el cuerpo cuando su desplazamiento desde su posición de equilibrio es 5.0 cm.

R. La frecuencia de oscilación f es:

$$f = 3 \text{ Hz}.$$

La aceleración del cuerpo, según la fórmula de M.A.S se calcula como (con $x = 0.05$ m):

$$a = -\omega^2 x = -(2\pi f)^2 x = -17.76 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

La fuerza de restitución es

$$F = -m\omega^2 x = -44.41 \text{ N}.$$

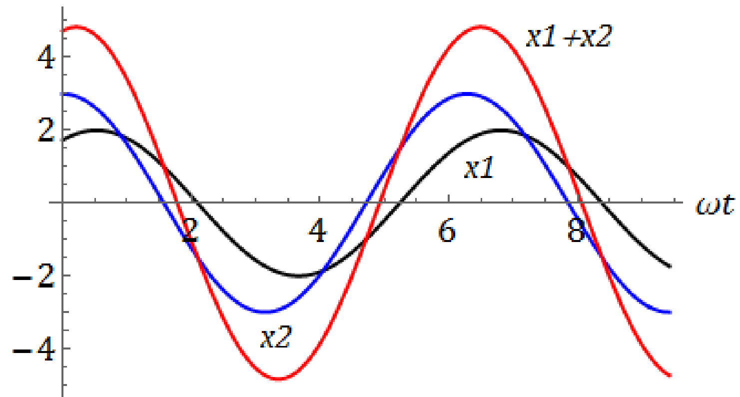
1.43 *M.A.S. Acoplados II.* Encontrar la ecuación resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son: $x_1 = 2\sin(\omega t + \pi/3)$ y $x_2 = 3\sin(\omega t + \pi/2)$. Realizar un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante.

R. El movimiento resultante está dado por: $x_r = x_1 + x_2 =$

$$\left(3 + \sqrt{3}\right)\cos(\omega t) + \sin(\omega t),$$

y las gráficas se ilustran en la figura adjunta. la función resultante puede escribirse como:

$$x_r = 4.83\sin(\omega t + 78.06°)$$



1.44 *Cuatro pasajeros* cuya masa combinada es de 300 kg comprimen en 5 cm los resortes de un auto cuando se suben a él. Si el auto cargado tiene un periodo de oscilación de 0.820 segundos, cuál es el periodo cuando éste está vacío?

R. Inicialmente en equilibrio, el resorte se comprime una longitud de 5 cm (d) bajo la acción del peso de los cuatro pasajeros. La constante elástica puede por lo tanto obtenerse desde la aproximación simple:

$$Kd \approx M_{pasajeros} g.$$

$$K \approx \frac{M_{pasajeros} g}{d} = 58{,}800 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

El periodo del sistema conjunto (carro y pasajeros) es de 0.820 s, y se relaciona con la masa total como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(M_{auto} + M_{pasajeros}\right)}{K}}.$$

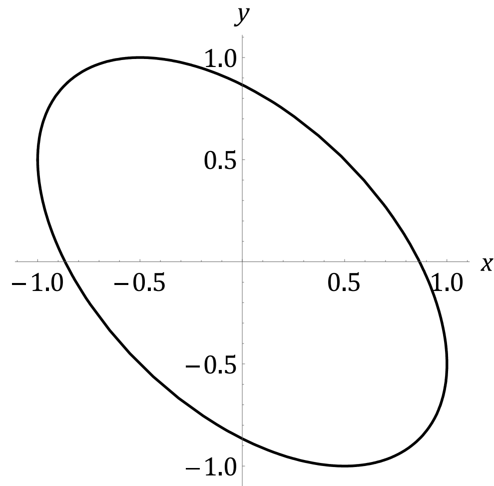
Despejando M_{auto}, entonces:

$$M_{auto} = \frac{KT^2}{4\pi^2} - M_{pasajeros} = 701.48 \text{ kg}.$$

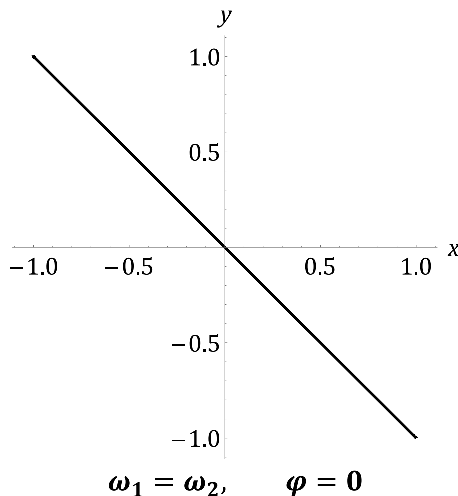
El periodo del auto sin pasajeros se obtiene desde: $T' = 2\pi\sqrt{M_{auto}/K} = 0.69$ s.

1.45 *M.A.S. Acoplados III.* Determine la trayectoria de un cuerpo sujeto a las condiciones de vibración dadas por:

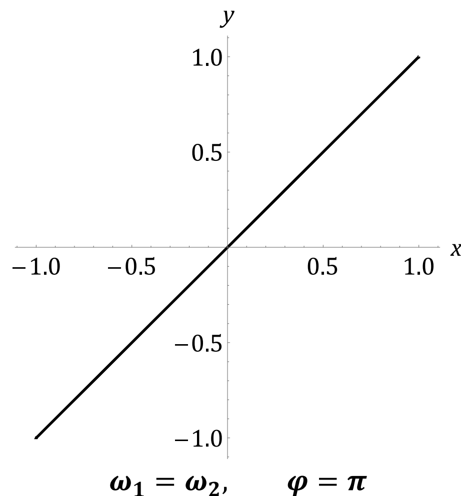
$$x = \sin \omega t \ , \qquad y = \sin(\omega t + 2\pi/3).$$



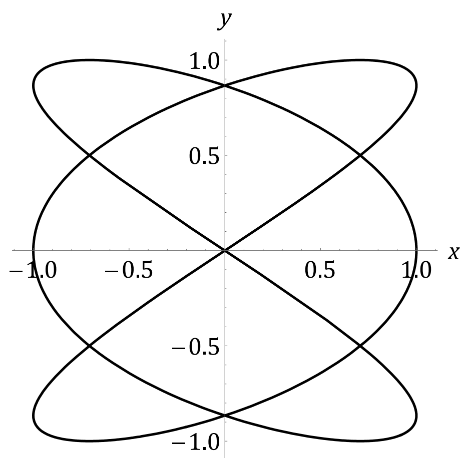
R. La ecuación de la trayectoria claramente es: $x^2 + xy + y^2 = 3/4$, el cual corresponde una trayectoria elíptica con centro en el origen de coordenadas. Para el caso general $x = \sin(\omega_1 t)$, $y = \sin(\omega_2 t + \varphi)$, [igual amplitud] las curvas paramétricas resultantes se conocen como figuras de Lissajous-Bowditch, las cuales describen movimientos armónicos complejos. Las figuras son sensitivas a la relación de frecuencias y la diferencia de fase. La razón ω_1/ω_2 determina el número de lóbulos horizontales y verticales, para valores enteros de $\omega_{1,2}$. Valores racionales de la relación ω_1/ω_2 producen figuras cerradas (conectadas), mientras valores irracionales producen figuras rotadas. Se ilustran a continuación algunos ejemplos.



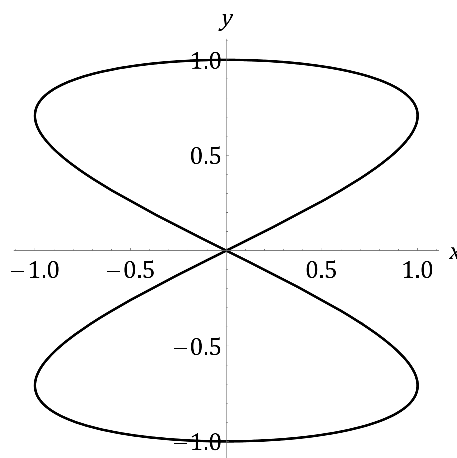
$\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2, \qquad \varphi = 0}$



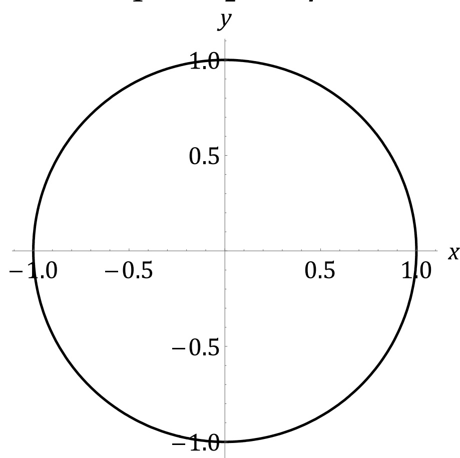
$\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2, \qquad \varphi = \pi}$



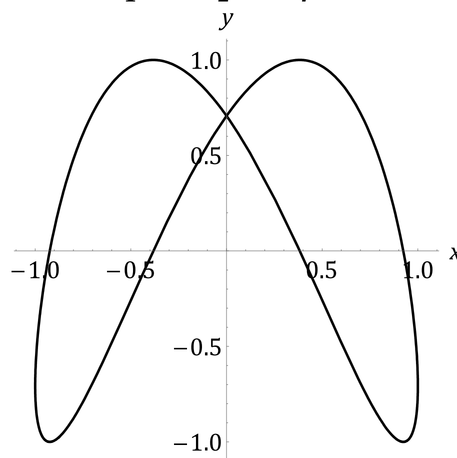
$2\omega_1 = 3\omega_2, \quad \varphi = 0$



$\omega_1 = 2\omega_2, \quad \varphi = 0$



$\omega_1 = \omega_2, \quad \varphi = \pi/2$



$2\omega_1 = \omega_2, \quad \varphi = 3\pi/4$

1.46 *Equivalencia de Energías.* Un oscilador armónico tiene una frecuencia angular ω y una amplitud A. a) Determine las componentes de posición y velocidad cuando su energía potencial elástica es igual a su energía cinética. b) Con qué frecuencia ocurre esto en cada ciclo?. c) Qué tiempo transcurre entre cada ocurrencia?.
R. (a) En este caso, planteamos la condición que exige el problema:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Kx^2.$$

Si el movimiento es armónico, entonces $K = M\omega^2$. Así, la ecuación anterior se reduce a:

$$v^2 = \omega^2 x^2.$$

En este caso, tenemos una ecuación y dos incógnitas. La segunda ecuación necesaria para resolver el problema proviene de la relación entre la velocidad instantánea, la posición instantánea y la amplitud de oscilación:

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2).$$

Al sumar las dos últimas expresiones, se elimina la variable posición x y se obtiene v:

$$2v^2 = \omega^2 A^2, \qquad v = \pm\frac{\omega A}{\sqrt{2}};$$

mientras que si las dos expresiones de la referencia se restan, tendremos (o reemplazando en la primera), las soluciones para la posición x:

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, las energías son iguales en los puntos $\pm A/\sqrt{2}$, en el intervalo $\{-A, A\}$.

(b) El número de veces en el cual la energía cinética del cuerpo es igual a la energía potencial, en un ciclo es cuatro (4). El cuerpo pasa por cada punto dos veces en una oscilación completa.

(c) Entre dos ocurrencias consecutivas transcurre un tiempo de un cuarto de periodo: $T/4$. Una forma de entender este resultado es la siguiente. Igualamos las funciones de energía potencial y energía cinética:

$$\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}M\omega^2 A^2\sin^2(\omega t)\,.$$

En forma equivalente,

$$\cos^2(\omega t) = \sin^2(\omega t)\,.$$

Esta igualdad se cumple solo si $\omega t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ en un ciclo. La diferencia entre dos valores consecutivos es: $\pi/2$. Por lo tanto, el tiempo Δt que transcurre entre dos eventos es: $\omega\Delta t = \pi/2$.

Reemplazando $\omega = 2\pi/T$, finalmente:

$$\Delta t = \frac{T}{4}.$$

1.47 *En las especificaciones militares* es frecuente exigir de los dispositivos electrónicos que sean capaces de resistir aceleraciones de $10g$. Para asegurarse de que sus productos cumplen con esta especificación, los fabricantes los someten a ensayos en unas mesas vibrantes que pueden hacer vibrar un equipo a diferentes frecuencias y amplitudes específicas. Si un dispositivo se somete a una vibración de 1.5 cm de amplitud, cuál debería ser su frecuencia?.

R. Si el dispositivo se somete a una aceleración de $10g$ y una amplitud de $A = 1.5$ cm, la ecuación que relaciona estas dos cantidades es:

$$a = -\omega^2 x.$$

La frecuencia de oscilación es:

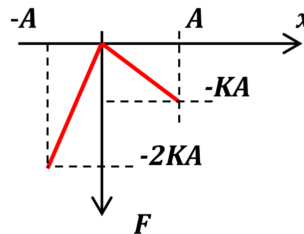
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10g}{A}} = 12.87 \text{ Hz.}$$

1.48 *Resorte "Real".* Muchos resortes reales son más fáciles de estirar que de comprimir. Es posible representar este caso utilizando diferentes constantes de resorte para $x > 0$ y para $x < 0$. Considere un resorte que ejerce la siguiente fuerza restauradora:

$$F = \begin{cases} -Kx & \text{si } x > 0, \\ 2Kx & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una masa M sobre una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se desplaza $x = A$ estirando el resorte y se libera. Determine (a) el valor más negativo de x que alcanza la masa M. (b) el periodo de movimiento. (c) es simétrica la oscilación respecto a $x = 0$?.

Función fuerza vs posición en un resorte "real".



(a) El valor más negativo de la posición que alcanza la masa M se obtiene desde el principio de conservación de la energía. La energía TOTAL del sistema, al estirar el resorte hacia los valores positivos de x es:

$$U = E = \frac{1}{2}KA^2.$$

Esta energía se conservará en **todos** los puntos, dado que se desprecia el efecto de la fricción. Cuando el resorte se comprime, su constante elástica efectiva es $2K$, y la energía potencial máxima almacenada es:

$$U = \frac{1}{2}(2K)A'^2,$$

en donde A' es la distancia máxima de compresión. Igualando:

$$U = E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(2K)A'^2.$$

Calculando para A':

$$A' = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

(b) El cálculo del periodo de movimiento puede realizarse de manera intuitiva:

i) El tiempo de recorrido desde $x = +A$ hasta $x = 0$ es $T/4$, con $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$.

ii) El tiempo de recorrido desde $x = 0$ hasta $x = -A'$ es $T'/4$, con $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$.

iii) El tiempo de recorrido desde $x = -A'$ hasta $x = 0$ es $T'/4$ con $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$.

iv) El tiempo de recorrido desde $x=0$ hasta $x=+A$ es $T/4$, con $T=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$.

Sumando estos tiempos, calculamos el periodo de oscilación del cuerpo de masa M acoplado en un resorte asimétrico:

$$Periodo = \frac{T}{2}+\frac{T'}{2}.$$

Introduciendo los valores:

$$Periodo = \pi\sqrt{\frac{M}{K}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.707\pi\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

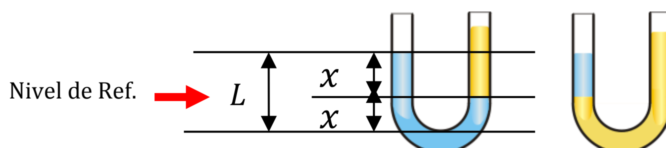
Para un resorte homogéneo, el periodo de oscilación es $2\pi\sqrt{M/K}$. Es decir, en el caso estudiado (resorte asimétrico), el periodo de movimiento es menor en un 15%.

(c) La oscilación con respecto a $x = 0$ es **asimétrica**, ya que $A \neq A'$.

1.49 *Oscilaciones en un líquido*. En un tubo en forma de U se vierte Mercurio (Hg). Determinar el periodo de las oscilaciones del mercurio, si el área de la sección transversal de cada tubo es $S = 0.3\ \text{cm}^2$, la masa total es de 468 g y la densidad del líquido es $\rho = 13.6\ \text{gcm}^{-3}$.

R. Utilizaremos el principio de conservación de la energía para definir la fuerza que experimenta el líquido en equilibrio y en movimiento. En el primer caso, sólo existe energía potencial gravitacional en los lados verticales del tubo. Si denotamos como L la longitud del líquido con respecto al nivel de referencia indicado, la energía potencial U asociada al centro de masa es: (*masa=densidad*área transversal*altura*).

$$U_{equilibrio} = mgL = \frac{\rho g S L^2}{2}+\frac{\rho g S L^2}{2} = \rho g S L^2.$$



Cuando el líquido es desplazado desde su posición de equilibrio, los centros de masa también se han desplazado con respecto a su nivel original. En el brazo derecho, su nueva localización es $(L+x)/2$, mientras que en el brazo izquierdo, éste está ubicado en $(L-x)/2$. La energía potencial gravitacional en este caso es:

$$U(x) = \frac{\rho g S(L+x)^2}{2}+\frac{\rho g S(L-x)^2}{2} = \rho g S(L^2+x^2) = U_{equilibrio}+\rho g S x^2.$$

La fuerza sobre el líquido puede calcularse derivando la energía potencial:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

El resultado es: $F = -2\rho gSx$, ya que *Uequilibrio* es constante. Observamos que F es proporcional al desplazamiento del líquido, y la constante de proporcionalidad es $2\rho gS$, el cual corresponde a la *"constante de restitución del sistema"*. La frecuencia de oscilación es:

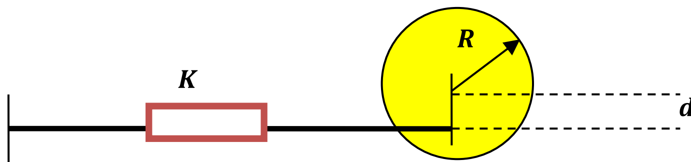
$$\omega = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}},$$

el periodo se calcula como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gS}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}.$$

Numéricamente: **T= 1.52 segundos.**

1.50 *Aplicación de las ecuaciones de Newton para un cuerpo rígido*. Un disco de radio R y masa M está montado sobre un eje sin fricción. Se instala un resorte de constante elástica K a una distancia d por debajo del eje, y el sistema se encuentra en equilibrio en la configuración ilustrada. Si al sistema se le hace girar un pequeño ángulo θ_0 y luego se libera, demuestre que éste oscila y obtenga una expresión para la frecuencia de oscilación.



R. Utilizamos la segunda ley de Newton para la rotación de cuerpos rígidos:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha},$$

en donde los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ corresponden al torque aplicado al disco y la aceleración angular del mismo. I es el momento de inercia con respecto al eje de giro (el cual coincide con el centro geométrico del disco). El torque (torsión) que ejerce la fuerza del resorte a una distancia d del centro, está dado por:

$$\tau = -Fd = -Kxd.$$

La deformación del resorte se aproxima a $x = d\theta$, para pequeños desplazamientos angulares θ. Por lo tanto:

$$\tau = -Kd^2\theta = I\alpha.$$

La relación entre la aceleración y el desplazamiento angular es:

$$\alpha = -\frac{Kd^2}{I}\theta.$$

Esta es una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia de oscilación:

$$\omega = \sqrt{\frac{Kd^2}{I}} = \sqrt{2}\frac{d}{R}\omega_0.$$

Debe reemplazarse el momento de inercia del disco: $I = MR^2/2,\ \omega_0 = \sqrt{K/M}$.

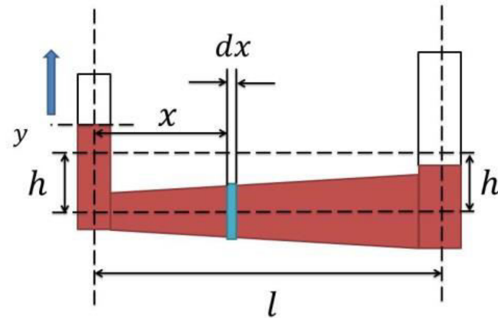
1.51 **Un tubo en U* tiene brazos verticales de radios r y $2r$, conectados por un tubo horizontal de longitud l cuyos radios se incrementan linealmente desde r a $2r$. El tubo contiene líquido hasta una altura h en cada brazo. El líquido empieza a oscilar, y en un instante dado su altura en el brazo más estrecho es y por encima del nivel de equilibrio.

(a) Demostrar que la energía potencial del líquido es $U = 5g\rho\pi r^2 y^2/8$. (b) Demostrar que la energía cinética de una capa de líquido de espesor dx en el brazo horizontal es

$$dK = \frac{1}{2}\frac{\rho\pi r^2 dx}{(1 + x/l)^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Utilizar integración directa para obtener la energía cinética total del líquido, ignorando los efectos de los bordes. (c) Desde los ítems (a) y (b) calcular el periodo de las oscilaciones de este sistema.

R. (a) La masa desplazada de líquido en ambos brazos es constante e igual a $m = \pi\rho r^2 y = \pi\rho(2r)^2 y'$, con $\pi(2r)^2 y'$ como el volumen desplazado en el tubo de radio $2r$. La energía potencial gravitacional del centro de masa adquirida por el líquido con respecto al nivel de referencia más bajo se obtiene como:



$$U(y) = \frac{g\pi\rho r^2(h+y)^2}{2} + \frac{g\pi\rho(2r)^2(h-y')^2}{2} = \frac{5g\pi\rho r^2 h^2}{2} + \frac{5g\rho\pi r^2 y^2}{8},$$

en donde la relación de los desplazamientos verticales es: $y' = y/4$. El factor $5g\pi\rho r^2 h^2/2$ corresponde a la energía potencial del sistema en equilibrio. (b) El elemento de masa horizontal dM transporta una energía cinética igual a:

$$dK = \frac{1}{2}dM\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Para un desplazamiento vertical de la masa $dM = \pi\rho r^2 dy$ corresponde un desplazamiento horizontal igual a: $dM = \pi\rho r^2(1 + x/l)^2 dx$.

De estas dos últimas expresiones se obtiene: $dx/dy = 1/(1+x/l)^2$. Un arreglo algebraico simple conduce a:

$$dK = \frac{1}{2}\frac{\rho\pi r^2 dx}{(1+x/l)^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Integrando en la región entre 0 y *l*, la energía cinética del líquido en el tubo horizontal es: $\rho\pi r^2 l(dy/dt)^2/4$, mientras que en los brazos verticales,

$$K_i + K_d = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 h\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\pi(2r)^2 h\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 = \frac{5}{8}\rho\pi r^2 h\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

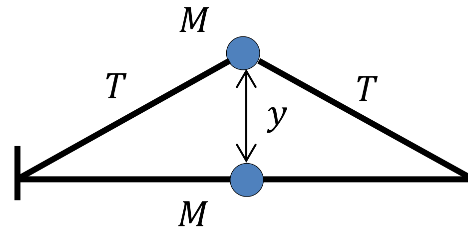
La energía cinética total es:

$$K_T = \frac{1}{4}\rho\pi r^2\left(l + \frac{5}{2}h\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

(c) El periodo de oscilación se calcula desde la ecuación de movimiento, con la masa efectiva igual a $\rho\pi r^2(l+5h/2)/2$ y la constante de restitución igual dada por: $5g\rho\pi r^2/4$ y

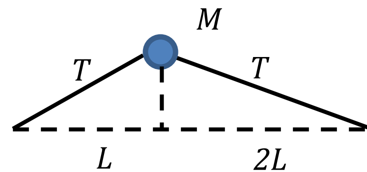
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2l+5h)}{5g}}.$$

1.52 *Oscilaciones en una banda elástica I.* Una masa M se conecta a dos bandas de hule de longitud L, cada una bajo una tensión T, como se muestra en la figura. La masa se desplaza una pequeña distancia vertical y. Suponiendo que la tensión no cambia significativamente, demostrar que el sistema presenta un movimiento armónico simple y calcular la frecuencia de oscilación del mismo.



R. La ecuación de movimiento está definida por: $Md^2y/dt^2 + 2Ty/L = 0$. La frecuencia de vibración del sistema es: $\omega = \sqrt{2T/ML}$.

1.53 *Oscilaciones en una banda elástica II.* Una cuerda de longitud $3L$ y masa despreciable está sujeta a dos soportes fijos en sus extremos. La tensión de la cuerda es T. Una partícula de masa M está acoplada a una distancia L desde uno de los extremos. Construir una ecuación para las pequeñas oscilaciones transversales de M y hallar su periodo.



R. La fuerza vertical resultante sobre el cuerpo es la suma de las componentes verticales de las dos tensiones generadas por cada tramo de la cuerda. Para el tramo a la izquierda del cuerpo, tendremos:

$$T_{Y1} = -T\frac{y}{\sqrt{y^2 + L^2}},$$

para el tramo a la derecha del cuerpo,

$$T_{Y2} = -T\frac{y}{\sqrt{y^2 + (2L)^2}},$$

en donde estas expresiones se obtienen definiendo ángulos correspondientes con respecto al eje vertical. La componente vertical de la tensión es aproximadamente igual a ($y << L$):

$$T_{Ty} = -\frac{3T}{2L}y.$$

La frecuencia de oscilación transversal del cuerpo es: $f = (1/2\pi)\sqrt{3T/2ML}$.

1.54 *Péndulo Físico.* Un péndulo en forma de disco sólido de masa $M = 0.015$ kg y radio $R = 0.050$ m puede oscilar alrededor de un eje perpendicular al disco y a una distancia desde su centro igual a la mitad del radio del mismo. Calcular el periodo de oscilación del sistema.
R. El periodo de un péndulo físico se obtiene desde la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I^0}{MgD}}$$

El momento de inercia del disco sólido con respecto a su CM es: $I_{CM} = MR^2/2$. Con respecto al eje de giro 0, debemos utilizar el teorema de ejes paralelos ($D = R/2$):

$$I^0 = I_{CM} + MD^2 = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3MR^2}{4}.$$

Reemplazando en la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 0.55 \text{ s.}$$

Nótese que el periodo de oscilación NO depende del valor de la masa. En general, si cambiamos la distancia al eje de giro desde su centro a un valor igual a $h < R$, el periodo de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2h^2}{2gh}}.$$

El valor de h que minimiza el periodo del péndulo es $h = R/\sqrt{2}$, con $T_{min} = 2^{1/4}2\pi\sqrt{R/g}$.

1.55 *Péndulo Físico.* Un péndulo físico se compone de una barra de masa M y longitud L. El punto de sujeción está ubicado a una distancia igual a $2L/3$ desde el extremo inferior de la barra. Calcular el periodo de oscilación.

R. Si el sistema es separado de su posición de equilibrio una pequeña distancia angular, y luego es liberado, calcular (a) El periodo de las oscilaciones, (b) El cambio en el periodo si se agrega una masa **puntual** M en el extremo inferior.



R. Caso (a). La inercia de la barra con respecto al eje de giro es $I^0 = I_{CM} + MD^2$. D corresponde a la distancia desde el eje de giro al centro de masa: $D = L/6$. La inercia es $I^0 = ML^2/9$ y periodo del péndulo toma el valor $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$.

Caso (b). Al agregar una masa puntual M en extremo, el centro de masa del sistema se *desplaza* a una posición $3L/4$ desde el extremo superior. En este caso, la distancia CM-EJE DE GIRO es $\boldsymbol{D = 5L/12}$. La inercia del sistema compuesto con respecto al eje de giro es: $I^0 = ML^2/9 + M(2L/3)^2 = 5ML^2/9$. El periodo toma el valor de: $T = 2\pi\sqrt{4L/3g}$. El cambio en el periodo con respecto al caso (a) es del orden de $\sqrt{2}$ veces mayor.

1.56 *Péndulo de torsión.* Un péndulo de torsión consiste de un bloque rectangular de madera de 8 cm×12 cm×3 cm con una masa de 0.3 kg, suspendido por medio de un alambre que pasa a través de su centro y de tal modo que el lado más corto es vertical. El periodo de oscilación es de 2.4 s. Cuál es la constante de torsión del alambre?

R. El periodo en un péndulo de estas características es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}.$$

La constante de torsión κ es:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

La inercia de la placa de madera con respecto al centro es, según la tabla:

$$I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = 5.2 \times 10^{-4}\ \text{kg} \times \text{m}^2.$$

$a = 8$ cm; $b = 12$ cm. $\kappa = 3.56 \times 10^{-3}\ \text{kg} \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.

1.57 Repetir el ejercicio 1.55 (a) si el eje de giro de la barra está localizado a una distancia $L/4$ desde uno de los extremos.
R. En este caso, la distancia desde el centro de masa y el eje de giro es $L/4$. El momento de inercia con respecto al eje giro de giro se obtiene desde el teorema de los ejes paralelos:

$$I^0 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2.$$

Reemplazando en la fórmula del periodo de oscilación de un péndulo físico, finalmente se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7L}{12g}}.$$

1.58 *Péndulo Físico.* Un adorno navideño en forma de esfera sólida de masa $M = 0.015$ kg y radio $R = 0.050$ m cuelga de una rama con un trozo de alambre unido a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta, éste oscila como péndulo físico. Calcule su periodo.
R. El periodo de un péndulo físico obedece la relación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}},$$

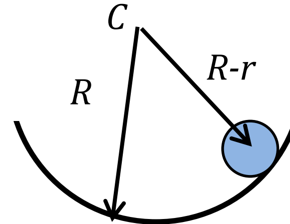
en donde I es el momento de inercia con respecto al eje de giro y D la distancia centro de masa (CM) eje de giro. Con $I = {}^7\!/_5\, MR^2$, y $D = R$ entonces:

$$T = 2\pi\sqrt{7R/5g} = 0.53 \text{ s}.$$

1.59 *Oscilaciones de un cuerpo rígido.* Una esfera sólida de radio r rueda sin deslizar en un canal cilíndrico de radio R, como se ilustra en la figura. demuestre que para desplazamientos pequeños alrededor de la posición de equilibrio y perpendiculares al eje del canal, la esfera ejecuta un M.A.S con un periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}},$$

en donde g es el valor de la aceleración gravitacional.



R. Planteamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E = E_K + U + Rot,$$

con E_K como la energía cinética del centro de masa, U representa la energía potencial gravitacional y Rot como energía cinética de rotación:

$$E_K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\Omega^2(R-r)^2;$$

$$U = Mgh;$$

$$Rot = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

El parámetro v corresponde a la velocidad del CM. La condición de rodamiento sin deslizamiento se cumple bajo la fórmula:

$$\omega r = \Omega(R - r),$$

en donde Ω es la frecuencia de rotación desde el centro de curvatura de la cavidad cilíndrica. La energía total se calcula como:

$$E = \frac{1}{2}M\Omega^2(R - r)^2 + \frac{I\Omega^2(R - r)^2}{2r^2} + U.$$

El momento de inercia de la esfera con respecto al C.M es:

$$I = \frac{2}{5}Mr^2.$$

La energía total entonces se reduce a:

$$E = \frac{1}{2}M\Omega^2(R - r)^2 + \frac{I\Omega^2(R - r)^2}{2r^2} + U,$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{7M}{5}\right)\Omega^2(R - r)^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{7M}{5}\right)(R - r)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + U(\theta).$$

Para pequeños desplazamientos angulares (con respecto a la base de la cavidad)

$$U(\theta) = Mg(R - r)(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}Mg(R - r)\theta^2.$$

La energía potencial tiene una forma cuadrática en la coordenada θ, la "constante" de restitución asociada a esta funcional de energía es $Mg(R - r)$, mientras que la funcional de energía total puede escribirse en forma genérica como:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega^2\theta^2 = \text{constante}.$$

Finalmente, el periodo de oscilación toma la forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}.$$

PR 1.4. A un péndulo de 2.5 m de longitud y 0.3 kg de masa se le imprime un impulso de 0.12 N · s. Hallar una expresión para θ en función del tiempo.

R. El impulso se define como la variación de la cantidad de movimiento sobre el cuerpo $I = M\Delta v$. La velocidad inicial del péndulo es:

$$\frac{I}{M} = v_0 = 0.4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La posición angular de la pesa en función del tiempo puede escribirse como:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t),$$

considerando el cuerpo se encuentra en la posición de equilibrio en el instante $t = 0$. La velocidad angular en función del tiempo:

$$\dot{\theta}(t) = \omega\theta_0 \cos(\omega t).$$

La velocidad angular inicial imprimida sobre la pesa es:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{l} = \omega\theta_0.$$

La amplitud de oscilación subsecuente es:

$$\theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gl}},$$

con $\omega = \sqrt{g/l}$. En términos de los parámetros suministrados en el ejercicio:

$$\theta(t) = \frac{I}{\sqrt{gl}M} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

$$\theta(t) = 0.081 \sin(1.98t) \text{ rad}.$$

1.60 *Resorte con masa.* Para determinar el efecto de la masa de un resorte, considere un resorte de masa M, con longitud de equilibrio L_0 y constante de fuerza K. Si el resorte se estira o se comprime una longitud L, la energía potencial es $Kx^2/2$, en donde $x = L - L_0$.

a) Considere un resorte con un extremo fijo y el otro en movimiento con una rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia Y al extremo fijo, y que la masa del resorte está distribuida uniformemente a todo lo largo del resorte. Calcular la energía cinética del resorte en términos de los parámetros dados. b) Obtener la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de conservación de la energía respecto al tiempo para una masa M acoplada en el extremo de este resorte. Obtener la frecuencia de oscilación del sistema.

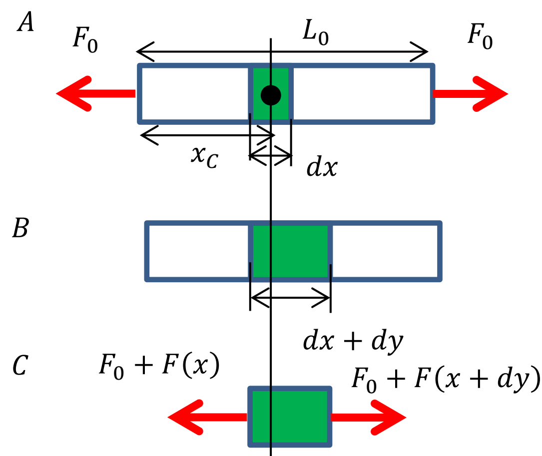


Fig. Ej. ***1.60*** *Diagrama de fuerzas para un resorte de masa M. A) Localización del centro de masa del resorte x_C en equilibrio. dx: Elemento de longitud del resorte. B) Elemento de deformación dy, para un desplazamiento y. C) Diagrama de fuerzas opuestas en los extremos del elemento de tamaño $dx + dy$.*

R. (a) Un diferencial de energía cinética dE puede obtenerse considerando un diferencial de masa $dM = MdY/L$ desplazándose con velocidad $v(Y) = Yv/L$, con Y medido desde el extremo fijo:

$$dE = \frac{1}{2} dMv(Y)^2.$$

Integrando sobre toda la longitud del resorte:

$$E = \int_0^L dE = \frac{1}{2}\int_0^L dMv(Y)^2 = \frac{Mv^2}{2L^3}\int_0^L Y^2 dY = \frac{Mv^2}{6}.$$

(b) El cambio en la energía total de este sistema está dado por:

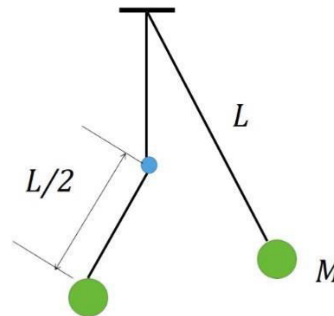
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Mv^2}{6} + \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}\right) = 0.$$

La ecuación de movimiento es:

$$\left(m + \frac{M}{3}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0,$$

cuya frecuencia de oscilación es: $\omega = \sqrt{K/(m + M/3)}$. $M' = (m + M/3)$ corresponde a la masa efectiva del sistema acoplado.

PR 1.5. Un péndulo consiste en una esfera de masa M al final de una cuerda de longitud $L = 1.2$ m. Existe un clavo a una distancia $L/2$ por debajo del punto de suspensión. Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones.



R. Este sistema compuesto oscila con dos intervalos definidos por las longitudes L y $L/2$. El periodo neto es:

$$T = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}\right) = 1.88 \text{ s}.$$

PR 1.6. Un trapecista de circo que se balancea en un trapecio alcanza un ángulo máximo de 15°. Si el trapecio está suspendido 12 m debajo de su punto de sujeción, hallar la velocidad del trapecista en función del ángulo.

R. El ángulo subtendido en función del tiempo es:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t).$$

La velocidad tangencial es:

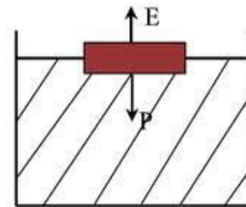
$$v(t) = -\omega\theta_0 l \sin(\omega t)$$

$$v(\theta) = \mp\sqrt{gl}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2},$$

$$v(\theta) = \mp 10.84\sqrt{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 - \theta^2}.$$

En esta última expresión, θ debe insertarse en radianes. La máxima velocidad que adquiere el trapecista es 2.84 m/s.

1.61 *Principio de Arquímedes y M.A.S.* Un bloque de madera cuya densidad relativa con respecto al agua es ρ tiene dimensiones a, b y c. Mientras el bloque está flotando en el agua con el lado a en la posición vertical, éste es empujado hacia abajo y luego liberado. Calcular el periodo de oscilación resultante.



R. La densidad relativa está definida explícitamente como: $\rho = \rho_{madera}/\rho_{agua}$. Según el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje es igual al peso del líquido del volumen del cuerpo sumergido. En este caso, si el volumen parcial del cuerpo sumergido es bcz, siendo z la longitud del bloque dentro del agua en la posición vertical, la fuerza de empuje es por lo tanto:

$$E(z) = \rho_{agua} gbcz.$$

La ecuación de movimiento para este sistema es: $\rho_{agua} gbcz = -\rho_{madera} abc(d^2z/dt^2)$. Claramente, este sistema oscila con movimiento armónico simple cuya frecuencia de vibración está definida por: $\omega = \sqrt{g/a\rho}$. ***Nota***: Es posible demostrar que la posición de equilibrio con respecto al lado que está sumergido en el líquido es: $z_0 = \rho a$. Como ejemplo numérico, si la especie de madera en cuestión es roble, con densidad 0.6 g/ml flotando sobre agua a temperatura ambiente con densidad 1 gr/ml, la posición de equilibrio del bloque está dada por $z_0 = 0.6a$, es decir, aproximadamente el 60% del cuerpo estará sumergido en el líquido.

PR 1.7. Un contenedor plástico de gasolina flotando en el agua oscila a una frecuencia de 1.2 Hz. Hallar la cantidad (nivel) de gasolina dentro del contenedor. Asuma que el contenedor es suficientemente plano y su oscilación es estable en el eje vertical.

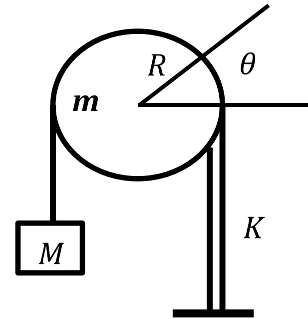
R. Ver ejemplo 1.61. La frecuencia angular de oscilación de este sistema es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

en donde z_0 es la longitud sumergida del tanque. Numéricamente,

$$z_0 = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = 17.2 \text{ cm}.$$

1.62 *Sistema mecánico polea-disco.* En la figura se representa un sistema mecánico constituido de un peso de masa M, del muelle a con coeficiente de elasticidad K y de la polea de masa m. El peso, mediante un hilo que se apoya sobre la polea, está unido al muelle. Hallar el periodo de oscilaciones del peso, si la polea tiene la forma de un cilindro de paredes delgadas y radio R.



R. En posición del equilibrio el muelle se ha deformado una distancia: $\delta = Mg/K$ y las oscilaciones del sistema tienen lugar alrededor de esta posición. El torque con respecto al centro del disco en un instante en donde éste se mueve en sentido anti horario es producido por una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento angular θ: $+I\alpha \approx -KR^2\theta$. La frecuencia de vibración del sistema es:

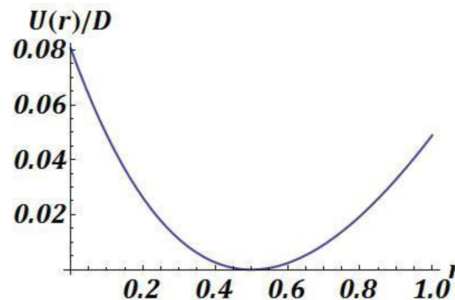
$$\omega = \sqrt{\frac{KR^2}{I}}.$$

El momento de inercia puede calcularse como la suma del momento de inercia del disco con respecto a su centro de masa y el momento de inercia del cuerpo acoplado a uno de sus extremos. Matemáticamente: $I = mR^2/2 + MR^2$. El periodo de vibración del sistema es por lo tanto: $T = 2\pi\sqrt{(m + 2M)/2K}$. Si la masa de la polea es despreciable, el periodo de oscilación coincide con el periodo de un sistema masa resorte simple: $T = 2\pi\sqrt{M/K}$, mientras que si la masa acoplada es cero, tendremos: $T = 2\pi\sqrt{m/2K}$.

1.63 *Potencial de Morse.* La energía potencial de interacción entre dos átomos en una molécula diatómica puede expresarse con buena aproximación por el potencial de Morse:

$$U(r) = D\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2,$$

siendo D, a y r_0 constantes positivas características de la molécula. (a) Construir un gráfico del potencial y encontrar la posición de equilibrio.



(b) Realizar un desarrollo en serie de potencias en $r - r_0$ y determinar la relación del primer término anarmónico al primer término armónico. (c) Encontrar, en función de D y a, la frecuencia de la vibración relativa de dos átomos a baja energía.

R. (a) La posición de equilibrio se encuentra en $r = r_0$. (b) En proximidades de la posición de equilibrio, el potencial toma la forma:

$$U(r) \approx Da^2(r - r_0)^2 - Da^3(r - r_0)^3 + \cdots +,$$

mientras que la relación del primer término anarmónico al primer término armónico es $a(r - r_0)$. Un perfil de la estructura del potencial de Morse en unidades reducidas con $a = 0.5$ y $r_0 = 0.5$ se ilustra en la figura adjunta.

(c) La frecuencia de vibración del sistema es, según la expresión anterior es:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Da^2}{\mu}},$$

donde μ corresponde a la masa reducida de la molécula y la constante de restitución es $2Da^2$.

1.64 *Una varilla uniforme de longitud* L oscila con un ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x desde su centro. (a) Demostrar que su frecuencia de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{gx}{\frac{L^2}{12} + x^2}}.$$

(b) Demuestre que la frecuencia máxima de oscilación ocurre cuando $x = L/\sqrt{12}$. (c) Qué longitud tendrá la varilla si la frecuencia angular máxima es 2π r/s?.

R. Utilizando la relación general para el péndulo físico:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I^0}},$$

Tendremos que para una varilla de longitud L la cual oscila en un punto a una distancia x, su momento de inercia está dado por el teorema de los ejes paralelos:

$$I^0 = \frac{ML^2}{12} + Mx^2.$$

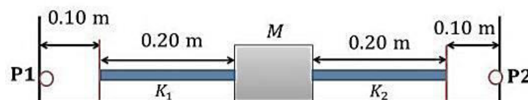
Si $D = x$, la distancia entre el eje de giro y el Centro de Masa, tendremos que la frecuencia de oscilación es: $\sqrt{gx/\left(\frac{L^2}{12} + x^2\right)}$. (b) La frecuencia máxima se obtiene calculando el punto extremo de la función $\sqrt{gx/\left(\frac{L^2}{12} + x^2\right)}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{gx}{\frac{L^2}{12} + x^2}}.\right) = 0.$$

Resolviendo para x, se obtiene $x = L/2\sqrt{3}$ y $\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{L}}$.

(c) Si la frecuencia de oscilación máxima es 2π r/s, su longitud debe ser $L = \sqrt{3}g/4\pi^2 = 0.430$ m, con $g = 9.8$ m/s.

1.65 *Dos resortes,* ambos con longitud natural de 0.20 m pero con diferentes constantes de fuerza K_1 y K_2 están unidos a las caras opuestas de un bloque con masa M sobre una superficie plana sin fricción. Los extremos finales se unen posteriormente a dos argollas P1 y P2 que están a 0.1 m de los extremos originales de los resortes. Sea $K_1 = 1$ N/m, $K_2 = 3$ N/m y $M = 0.2$ kg. (a) Calcular la nueva posición de equilibrio después de fijar los resortes en las argollas. (b) Calcular el periodo de vibración del bloque si se desplaza desde su nueva posición de equilibrio y posteriormente es liberado.



R. (a) Sea l = 0.1 m la deformación inicial del resorte. Al acoplar los resortes a las argollas el cuerpo regresará a su nueva posición de equilibrio si la fuerza resultante es cero, ó:

$$K_1(l+\delta) = K_2(l-\delta) \quad (K_2 > K_1).$$

$$\delta = \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right) l = 0.05 \text{ m}.$$

La nueva posición de equilibrio es 0.350 m y 0.250 m desde P1 y P2, respectivamente. (b) el periodo de oscilación es $T = 2\pi\sqrt{M/(K_2+K_1)} = 1.4$ s.

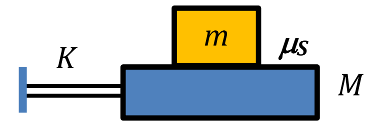
1.66 Una rueda de un reloj mecánico tiene una masa de 0.05 g, un momento de inercia de 3.61×10^{-2} g · cm^2, y toma 10 s en completar exactamente 28 oscilaciones rotacionales. (a) Hallar el coeficiente de torsión. (b) Si el reloj se adelanta 2 min/día, en cuánto debería cambiar el momento de inercia de la rueda con el fin de ajustar a la hora correcta?

R. (a) El periodo de oscilación de la rueda es $10/28$ s (0.3571 s). El coeficiente de torsión es:

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} I = 11.176 \text{ g} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}.$$

(b) En dos minutos el sistema efectuará 336 oscilaciones adicionales. El número de oscilaciones completas en el día son 241920. El ajuste deseado debe reducir éste número a 241584, el cual significa que el significa que el nuevo periodo será 0.35764 s. La inercia de la rueda debe cambiar a: $I' = I(T'/T)^2 = 3.62005 \times 10^{-2}$ g · cm^2, alrededor de un 0.278358% de su valor original.

1.67 *Un bloque de masa M* descansa sobre una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con una constante de fuerza K. El otro extremo del resorte está fijo a una pared. Un segundo bloque de masa m está sobre el primero. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación máxima la cual puede oscilar el sistema sin que el bloque superior resbale.



R. La aceleración del sistema a puede calcularse como: $a = F/(M+m)$, en donde F es la fuerza neta externa sobre el mismo. Si el sistema oscila como un todo con amplitud A, entonces la fuerza máxima exterior aplicada es KA. La aceleración máxima es

$$a_{max} = \frac{KA}{M+m}.$$

Si el bloque de masa m no se desliza sobre el bloque inferior, éste experimentará un equilibrio dado por la fuerza de fricción $\mu_s mg$. Igualando esta fuerza de fricción con la fuerza externa sobre el bloque de masa m:

$$ma_{max} = \mu_s mg.$$

De esta última relación, se obtiene el valor máximo de la amplitud de oscilación:

$$A = (M+m)\frac{\mu_s g}{K}.$$

1.68 *M.A.S. en un motor.* El movimiento del pistón de un motor de un auto es aproximadamente M.A.S. a) Si la carrera de un motor (el doble de la amplitud) es de 0.100 m y el motor trabaja a 2500 rpm, calcule la aceleración del pistón en el extremo de la carrera. b) Si el pistón tiene una masa de 0.350 kg, que fuerza neta debe ejercerse sobre él en este punto? c) Qué rapidez tiene el pistón, en m/s, en el punto medio de su carrera?



R. a) 2500 rpm equivalen a 262 rad/s. La magnitud de la aceleración del pistón en el extremo de la carrera es $a = \omega^2 A = 3.432 \times 10^3$ m/s^2. b) La fuerza es $F = Ma = 1.2$ kN. c) En este punto, la rapidez es máxima e igual a $v_{máx} = \omega A = 13.1$ m/s.

1.69 *Oscilaciones en un elevador.* Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular de 2 r/s. El resorte está suspendido en equilibrio en el techo de un elevador cuando éste desciende a una velocidad constante de 1.5 m/s. El elevador se detiene instantáneamente. Desprecie la masa del resorte. Cuál es la amplitud de oscilación de la

partícula?. Cuál es la ecuación de movimiento de la partícula? (Escoger la dirección positiva hacia arriba).

R. Cuando elevador viaja a una velocidad constante, la fuerza neta sobre la partícula es cero. La fuerza ejercida por el resorte es igual a la fuerza gravitacional sobre la masa, y el resorte se encuentra deformado en una longitud de equilibrio vertical. Cuando el elevador se detiene, el extremo del resorte también se detiene, sin embargo la partícula posee un *momentum* $p = mv$, y por lo tanto el resorte empieza a estirarse. Éste se mueve desde su posición de equilibrio con su máxima velocidad igual a $v_{máx} = 1.5$ m/s. La velocidad como función del tiempo es:

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

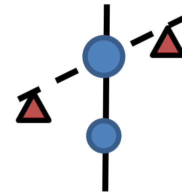
Dado que la velocidad máxima es igual a ωA, y con el dato de la velocidad angular conocido, obtenemos la amplitud de oscilación $A = 0.75$ m. La solución a la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Si en $t = 0$ se escoge $x(0) = 0$ y la dirección positiva de la velocidad en el marco de referencia positivo hacia arriba, entonces $\varphi = \pi/2$. Obsérvese que la amplitud de oscilación también puede calcularse por principio de conservación de la energía: la energía mecánica total del resorte (con respecto a su posición de equilibrio) es igual a la energía cinética máxima que adquiere al partícula:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_{máx}^2, \quad A = \frac{v_{máx}}{\omega}.$$

1.70 *Un péndulo está formado por una varilla* de 200 g de masa y 40 cm de longitud y dos esferas macizas: la superior de 500 g y 5 cm de radio y la inferior de 400 g y 4 cm de radio, equidistantes 8 cm de los extremos de la barra. El péndulo se ha suspendido de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de la esfera superior. Hallar el periodo de este sistema.



R. La distancia entre los centros de las esferas es de 24 cm. El momento de inercia del sistema compuesto con respecto al eje de giro se puede calcular como el momento de inercia de la barra y de las esferas acopladas a la misma:

$$I = I_{barra} + I_{esferas},$$

$$I_{barra} = \frac{ML^2}{12} + Mx^2 = \frac{0.2(0.4)^2}{12} + 0.2(0.12)^2 = 0.0055 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

con x como la distancia entre el CM de la barra y el eje de giro. El momento de inercia de la esfera inferior de 400 g con respecto al eje de giro es ($d = 0.32$ m)

$$I_{esfera} = \frac{2}{5}M_{esfera}R^2 + M_{esfera}d^2 = 0.041 \text{ kg.m}^2.$$

La esfera superior posee un momento de inercia igual a $2M_{esfera}R^2/5 = 5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

El peso de la esfera de 500 g no produce un torque de movimiento pero afecta el momento de inercia total del sistema. Así, la inercia total es:

$$I = 0.047 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

El centro de masa del sistema compuesto es (con respecto al eje de giro):

$$D = \frac{0 \times 0.5 + 0.12 \times 0.2 + 0.24 \times 0.4}{0.5 + 0.2 + 0.4} = 10.9 \text{ cm}.$$

El centro de masa está localizado a 10.9 cm desde el eje de giro. Finalmente, el periodo de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.047}{1.1 \times 9.8 \times 0.109}} = 1.26 \text{ s}.$$

1.71 *Para cierto oscilador* la fuerza neta sobre el cuerpo de masa M está dada por $F = -cx^3$. a) Cuál es la función de energía potencial de este oscilador si tomamos $U = 0$ en $x = 0$?. b) El cuerpo se mueve desde $x = 0$ hasta $x = A$ en 1/4 de periodo. Calcular el tiempo requerido para efectuar este movimiento. c) Depende el periodo de la amplitud?. Es éste un movimiento armónico simple? *Sugerencia: Utilizar el resultado* $\int_0^1 dy/\sqrt{1-y^4} = 1.31$.

R. a) La función de energía potencial se define como menos el trabajo necesario realizado por la fuerza para desplazar el cuerpo entre dos puntos:

$$U(x) = -\int_0^x F(y)dy = \frac{cx^4}{4}.$$

b) El tiempo necesario en efectuar el recorrido indicado se obtiene directamente desde la integral:

$$t_{0\to A} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}(E - U(x))}}.$$

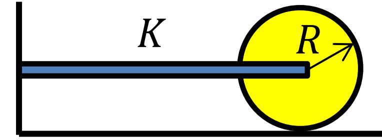
Si la energía total del oscilador es $E = cA^4/4$, entonces, con el cambio de variable indicado $y = x/A$:

$$t_{0\to A} = \int_0^1 \frac{Ady}{\sqrt{\frac{cA^4}{2M}(1-y^4)}} = \sqrt{\frac{2M}{cA^2}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 1.31\sqrt{\frac{2M}{cA^2}} = \frac{T}{4}.$$

El periodo de oscilación es: $T = 5.24\sqrt{\frac{2M}{cA^2}}$.

d) El periodo es inversamente proporcional a la amplitud de oscilación, y el movimiento subsecuente **no** es armónico simple.

1.72 *Un cilindro sólidos* conectado a lo largo de su eje común por una barra corta y ligera tiene un radio R y una masa total M y descansa sobre una mesa horizontal. Un resorte con constante de fuerza K tiene un extremo sujeto a una abrazadera y el otro a un pivote sin fricción en el centro de masa del cilindro.



Se desplaza el cilindro hacia la derecha una distancia x, estirando el resorte, y se libera. Existe suficiente fricción entre la mesa y el cilindro para que éste ruede sin resbalar al oscilar horizontalmente. Demuestre que el movimiento del centro de masa es armónico simple, y calcule su periodo.

R. El momento de inercia total del sistema con respecto al CM es $I^{CM} = MR^2/2$. La magnitud del torque con respecto a un punto de contacto sobre la superficie es:

$$\tau = F^r R = KRx.$$

La segunda ley de Newton para la rotación de los cuerpos rígidos establece la relación entre el torque resultante y la aceleración angular:

$$\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}.$$

El momento de inercia con respecto a un punto de contacto sobre la superficie es, según el teorema de los ejes paralelos:

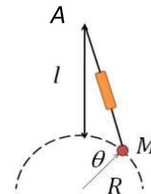
$$I = I^{CM} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Ahora:

$$\frac{3}{2}MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -KRx = -KR^2\theta,$$

en donde el signo (-) proviene de la dirección opuesta entre el torque debido a la fuerza de restitución y el movimiento del cilindro. El movimiento es armónico simple y la frecuencia de vibración es: $\omega = \sqrt{2K/3M}$, mientras que su periodo es: $T = 2\pi\sqrt{3M/2K}$.

1.73 *Hallar la frecuencia de oscilación de una partícula de masa M la cual es libre de moverse sobre un círculo de radio R.* La masa está acoplada a un resorte cuyo extremo está fijo en un punto A y a una distancia l *(ver figura).* Una fuerza F se requiere para extender el resorte una distancia l*.*



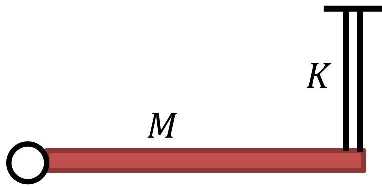
R. La deformación del resorte se calcula como ($l \gg R\theta$):

$$\delta l = \sqrt{\left(l + R(1-\cos\theta)\right)^2 + R^2\sin^2\theta} - l \approx l\sqrt{1 + \frac{R(R+l)\theta^2}{l^2}} - l \approx \frac{R(R+l)\theta^2}{2l},$$

mientras que la energía potencial elástica tiene la forma:

$$U(\theta) = F\delta l = F\frac{R(R+l)\theta^2}{2l} = \frac{1}{2}\frac{F(R+l)(R\theta)^2}{Rl} = \frac{1}{2}M\omega^2(R\theta)^2,$$

y la frecuencia de oscilación se aproxima a: $\omega = \sqrt{F(R+l)/MRl}$. Las oscilaciones subsecuentes se consideran con respecto a la posición de equilibrio localizada justo en la parte superior del domo, con $\theta = 0$.



1.74 *Una barra uniforme de 1 metro de longitud* y masa M puede pivotear en un extremo y es mantenida en posición horizontal con un resorte acoplado de constante elástica K. Si la barra es desplazada levemente desde su posición de equilibrio, demostrar que ésta oscilará con M.A.S. y calcular su frecuencia de vibración.

R. El momento de inercia con respecto al pivote (o eje de giro) es:

$$I = I^{CM} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}.$$

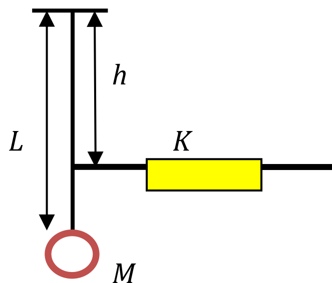
El torque debido a la fuerza de restitución del resorte es en magnitud: $\tau = KL^2\theta = K\theta$, en donde θ es el ángulo de desviación de la barra con respecto al eje horizontal. La ecuación de movimiento resultante es:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta.$$

La frecuencia de oscilación del sistema se aproxima a:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3K}{M}}.$$

1.75 *Péndulo Físico.* Un péndulo de longitud L y masa M posee un resorte ideal acoplado a él de constante de fuerza K y localizado a una distancia h por debajo de su punto de suspensión, como se muestra en la figura. Demuestre que el movimiento es M.A.S y encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeñas desviaciones desde su posición de equilibrio.



R. Considerando que la masa de la barra es despreciable, sobre el pivote actúan dos momentos de fuerza generados por el peso de la masa M y la fuerza de restitución del resorte aplicada a una distancia h desde el punto de giro. Matemáticamente, estos momentos se aproximan a:

$$\tau_{\text{Peso}} \approx -MgL\theta,$$

$$\tau_{\text{Fuerza de Restitución}} \approx -Kh^2\theta.$$

Utilizando la segunda ley del movimiento de los cuerpos rígidos, se obtiene:

$$-MgL\theta - Kh^2\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

en donde I es el momento de inercia de sistema con respecto al eje de giro $I = ML^2$. La frecuencia de vibración del sistema es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{Kh^2}{ML^2}}.$$

1.76 *Una pelota* se deja caer desde una altura h de 4.0 m y choca con el suelo en una colisión perfectamente elástica. Suponiendo que no se disipa energía por el rozamiento del aire,

(a) Demostrar que el movimiento es periódico;
(b) Determinar el periodo de movimiento;
(c) Es éste movimiento M.A.S?.

R. (a) En una colisión perfectamente elástica, la energía total se conserva y la pelota alcanzará la misma altura después de la colisión. (b) El periodo de movimiento se puede obtener como el doble del tiempo que tarda la pelota en alcanzar el suelo: $T = 2t = 2\sqrt{2h/g} = 1.81\ s$.
(c) El movimiento no presenta características de M.A.S. El movimiento es oscilatorio.

1.77 *Una regla métrica* uniforme oscila libremente suspendida en uno de sus extremos. Un poco de cera cuya masa es igual al 12% de la masa de la regla se coloca en la marca de 500 mm. Cuál es el periodo de las oscilaciones?. En qué lugar de la regla habría que colocar la cera para que no afectase al periodo?

R. El periodo de oscilación se obtiene aplicando la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}.$$

La inercia del sistema compuesto es: $I = 0.12M(L/2)^2 + ML^2/3 = 0.36ML^2$. D es la distancia al centro de masa del sistema, en este caso

$$D = \frac{\frac{ML}{2} + \frac{0.12ML}{2}}{1.12M} = \frac{L}{2}.$$

El periodo de oscilación es ($L = 1$ m):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.72L}{g}} = 1.70 \text{ s.}$$

Si la masa de cera se coloca en un punto X de la regla, desde el soporte en uno de los extremos, el momento de inercia cambia con la distancia como:

$$I = 0.12MX^2 + \frac{ML^2}{3},$$

mientras que el C.M. depende de la distancia al extremo como ($L = 1$ m):

$$D = \frac{\frac{ML}{2} + 0.12MX}{1.12M} = 0.446 + 0.107X.$$

El periodo es por lo tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.12X^2 + \frac{1}{3}}{g(0.446 + 0.107X)}}.$$

Si el periodo se mantiene inmodificable, debe cumplirse:

$$\frac{0.12X^2 + \frac{1}{3}}{(0.446 + 0.107X)} = 0.72,$$

cuyas soluciones son: $\mathbf{X = 0.2574\ m}$; $\mathbf{X = 0.384569\ m}$.

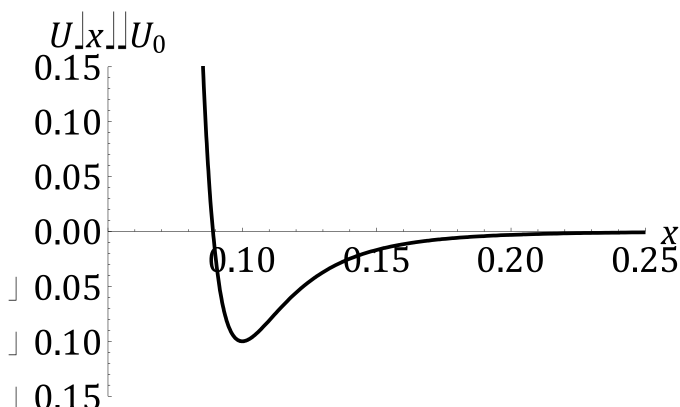
1.78 *Potencial de Van der Waals* . La energía potencial de una partícula en un arreglo de átomos puede describirse a través del potencial (Van der Waals):

$$U(x) = U_0((\alpha/x)^{12} - 2(\alpha/x)^6).$$

Determinar la posición de equilibrio de esta partícula. Para valores de x próximos a la posición de equilibrio, la energía potencial se puede aproximar por la siguiente relación parabólica:

$$U(x) \approx C + \frac{1}{2}K(x - x_0)^2.$$

Determinar C y K.



R. La posición de equilibrio es $x_0 = \alpha$. En proximidades de esta posición tendremos: $C = -U_0$ y $K = 72U_0/\alpha^2$. La fuerza de restitución que experimenta la partícula puede aproximarse a $F(x) = -(72U_0/\alpha^2)(x-\alpha)$. El perfil de la energía potencial de Van der Waals es ilustrado en la figura adjunta con $\alpha = 0.1$ y $U_0 = 0.1$.

1.79 *Tres partículas* con carga positiva se mantienen en una línea recta. Las partículas de los extremos son idénticas y se mantienen fijas separadas una distancia $2R_0$. La energía potencial para la fuerza que actúa sobre la partícula central puede escribirse como $U(r) = A[1/r - 1/(r-2R_0)]$, donde A es una constante positiva y r es la distancia desde la partícula izquierda a la central. (a) Demostrar que la fuerza sobre la partícula central es $F(r) = A[1/r^2 - 1/(r-2R_0)^2]$. (b) Demuestre que $r = R_0$ en equilibrio. (c) Utilice la expansión $r = R_0 + x$ para demostrar que $F \cong -(4A/R_0^3)x$. (d) Que frecuencia de oscilación posee la partícula central si ésta tiene masa M?.
R. (a) La fuerza se obtiene desde la relación de gradiente de la energía potencial: $F = -\partial U/\partial r$. (b) La condición de equilibrio se define como: $F = -\partial U/\partial r = 0$, con un posible mínimo en $r = R_0$. La segunda derivada de la energía potencial en este punto conduce a $4A/R_0^3 > 0$, el cual corresponde efectivamente a un mínimo de energía potencial. (c) Utilizando la expansión de Taylor del tipo:

$$(1+z)^{-2} \approx 1 - 2z, \qquad z \ll 1,$$

la fuerza puede escribirse como:

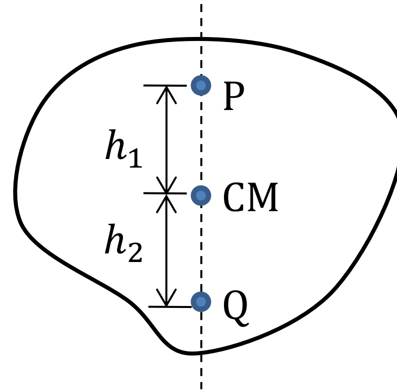
$$F = \frac{A}{R_0^2}\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{-2} - \frac{A}{R_0^2}\left(1-\frac{x}{R_0}\right)^{-2} \approx -\frac{4A}{R_0^3}x,$$

cuya relación lineal con el desplazamiento desde su posición de equilibrio x es evidente. La frecuencia de oscilación para una partícula de masa M es:

$$\omega = \sqrt{\frac{4A}{MR_0^3}}.$$

1.80 *Péndulo Físico.* Un objeto plano irregular tiene un momento de inercia I con respecto a su centro de masa. Cuando se hace girar alrededor de un punto **P**, como se indica en la figura, oscila con un periodo T. Existe otro punto **Q** en el lado opuesto del centro de masa respecto al cual el objeto oscila con el mismo periodo. Demostrar que se cumple la relación $h_1 + h_2 = gT^2/4\pi^2$.

R. El periodo de oscilación de un péndulo físico es: $2\pi\sqrt{I^0/MgD}$, en donde I^0 es el momento de inercia con respecto al eje de giro, y D es la distancia desde el CM hasta el eje de giro. Si el objeto oscila con respecto al punto P, su periodo es:



$$2\pi\sqrt{\frac{I+Mh_1^2}{Mgh_1}}.$$

Si ahora este objeto oscila con respecto al punto Q, tendremos que su periodo de oscilación es:

$$2\pi\sqrt{\frac{I+Mh_2^2}{Mgh_2}}.$$

Igualando las dos expresiones, (el periodo es el mismo) tendremos una expresión para el momento de inercia:

$$I = Mh_1h_2.$$

Reemplazando en cualquiera de las fórmulas anteriores, obtenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh_1h_2+Mh_1^2}{Mgh_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{h_1+h_2}{g}},$$

en donde efectivamente la relación entre las distancias es: $h_1 + h_2 = gT^2/4\pi^2$.

1.81 *Un anillo de diámetro d* cuelga de un clavo. Cuál es el periodo de oscilación de este sistema?. Considere la aproximación de pequeñas amplitudes.

R. Utilizamos la fórmula para el periodo de un péndulo físico:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}.$$

Adaptando la fórmula para el caso particular, el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por uno de sus diámetros perpendicular al plano del anillo es: $I = 2MR^2 = Md^2/2$; $D = d/2$. Reemplazando:

$$T = 2\pi\sqrt{d/g}.$$

1.82 *Un cubo de hielo* pequeño y resbaladizo se sitúa cerca del fondo de una vasija con un radio de curvatura $R = 140$ mm. Cuál es el periodo de las pequeñas oscilaciones del cubo?

R. La fuerza que produce el movimiento del pequeño cubo es la componente tangencial de su peso:

$$F = -Mg\sin\theta.$$

Esta fuerza es igual a $MR\alpha$, en donde α es la aceleración angular. En la aproximación de pequeñas amplitudes, $\sin\theta \approx \theta$, y el periodo de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 0.75 \text{ s},$$

el cual es igual al periodo de un péndulo de longitud R.

1.83 *Un péndulo compuesto consiste* en una barra de acero de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro que cuelga del techo en uno de sus extremos y está acoplada a una esfera rígida de bronce de 10 cm de radio en el otro. Despreciando los efectos de la fricción, (a) calcular el periodo de oscilación de este sistema. (b) Si la amplitud de oscilación es 15°, hallar la energía mecánica total de éste péndulo. (c) Hallar la velocidad de la esfera en el punto más bajo de la trayectoria de oscilación. Las densidades de masa son: $\rho_{acero} = 7.75 \times 10^3$ kg/m^3 y $\rho_{bronce} = 8.920 \times 10^3$ kg/m^3.

R. (a) Utilizamos la fórmula general para el periodo de un péndulo físico (compuesto):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I^0}{MgD}},$$

con M como la masa total. La inercia del sistema compuesto con respecto al eje de giro es:

$$I^0 = I^0_{barra} + I^0_{esfera}.$$

$$I^0_{barra} = \frac{1}{3}M_{barra}L^2$$

$$I^0_{esfera} = \frac{2}{5}M_{esfera}R^2 + M_{esfera}(L+R)^2.$$

La distancia desde el centro de masa y el eje de giro D es:

$$D = \frac{M_{barra}\frac{L}{2} + M_{esfera}(L+R)}{M}.$$

Las masas de la barra y la esfera son, respectivamente: $M_{barra} = \pi\rho_{acero}r^2L$, con r como el radio de la sección transversal, y $M_{esfera} = 4\pi\rho_{bronce}R^3/3$. Reemplazando los valores numéricos: $M_{barra} = 0.6$ kg, $M_{esfera} = 37.4$ kg, $I^0_{barra} = 0.2$ kg m^2 , $I^0_{esfera} = 45.4$ kg m^2, $I^0 = 45.6$ kg m^2. La inercia del sistema compuesto está definida principalmente por el término $I^0 \sim M_{esfera}(L+R)^2$, $D = 1.091$ m. Debido a la gran masa de la esfera comparada con la masa de la barra, el centro de masa del sistema prácticamente coincide con el centro de la esfera. Finalmente, el periodo de oscilación es:

$$\boldsymbol{T = 2.10 \text{ s}}.$$

(c) La energía mecánica total se obtiene desde la expresión:

$$E = \frac{1}{2} M\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (L+R)^2\theta^2 = 14.07 \text{ J}.$$

(d) La velocidad en el punto más bajo de la trayectoria (la energía potencial gravitacional es cero):

$$v = \sqrt{\frac{2E}{M}} = 0.86 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.84* *Resorte no lineal.* Todos los resortes tienen en algún grado un comportamiento no lineal, de forma que la fuerza restauradora no es estrictamente proporcional al desplazamiento x. Considere que la componente de la fuerza del resorte es de la forma

$$F = -kx - \alpha x^2.$$

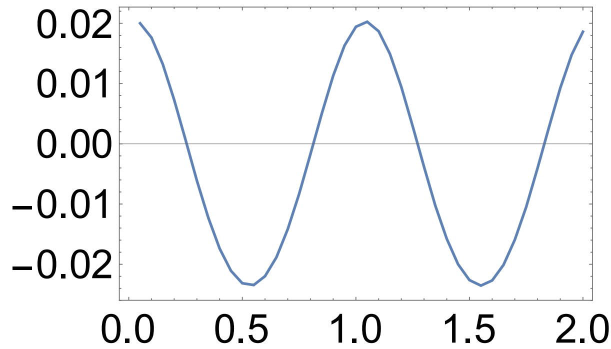
Determine el movimiento de un oscilador no amortiguado sometido a esta fuerza. Sea $M = 1$ kg, $k = 39.5$ N/m, $\alpha = 400$ N/m^2, $v_{X0} = 0$. Considere el movimiento desde $t = 0$ hasta $t = 2.0\ s$ para el caso $X_0 = 0.020$ m.

R. Este ejercicio puede resolverse utilizando análisis numérico. Utilizando la definición de segunda derivada:

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = a(t) = \frac{F}{M} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+2\Delta t) - 2X(t+\Delta t) + X(t)}{\Delta t^2}.$$

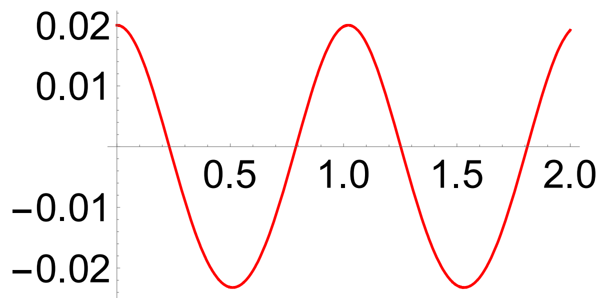
Es posible implementar un algoritmo simple en el programa *Mathematica* que permita obtener la posición de la partícula entre 0 y 2 segundos con resultados muy cercanos a la solución exacta. La condición de velocidad inicial cero implica X[1]=X[0]=0.02 en nuestro código.

```
Clear["Global`*"];
Δt=0.05;
a[j_]:=-39.5*X[j]-400*X[j]^2;
sol[k_]:=RecurrenceTable[{X[j+1]==2*X[j]+(Δt^2)*(a[j])-X[j-1],X[0]==0.02,X[1]==0.02},X,{j,1,k}][[k]];
ListPlot[Table[{k*Δt,sol[k]},{k,1,40,1}],Joined->True,Frame->True,LabelStyle->{FontSize->24,Black}]
```

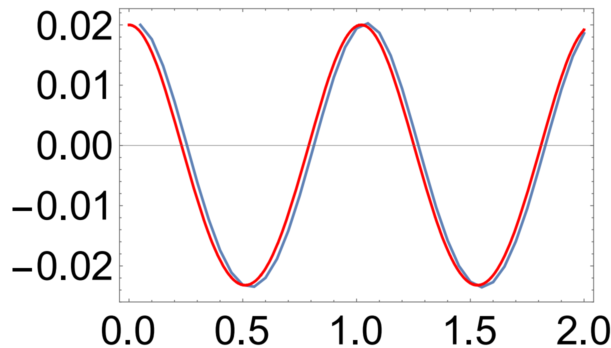


```
s=NDSolve[{y''[t]+39.5*y[t]+400*y[t]^2==0,y[0]==0.02,y'[0]==0},y,{t,0,2}];
```

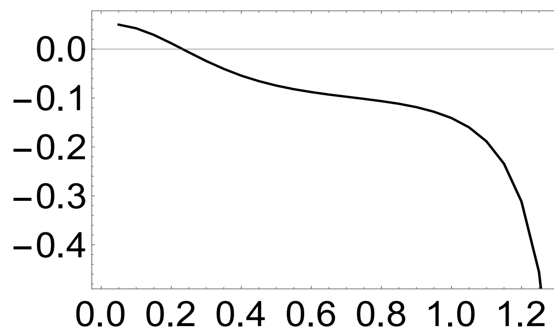
```
Plot[Evaluate[{y[t]/.s}],{t,0,2},PlotStyle->Red,LabelStyle->{FontSize->24,Black}]
```



```
Show[%20,%23]
```



Se observa que la partícula obedece un movimiento similar a un M.A.S con periodo de 1 s aproximadamente. Al variar la posición inicial del cuerpo a $X_0 = 0.050$ m, y utilizando el algoritmo anterior, la respuesta de la posición instantánea puede verse con un valor asintótico ~1.4 segundos. El sistema es inestable para este valor inicial de fuerza.



1.85 *Solución Anarmónica.* Refiriéndonos al problema anterior, (a) probar como solución

$$x(t) = x_1 + A\cos(\omega t) + B\cos(2\omega t),$$

en el caso $\alpha < 0$, y en donde el primer y último término son los resultados de la contribución anarmónica de la energía potencial. Despreciando todos los términos que involucran productos de A y B o potencias de B mayores que la primera, obtener las relaciones para los coeficientes A, B y x_1.

R. Desde la ecuación de movimiento,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) - 4\omega^2 B\,(2\cos^2(\omega t) - 1) = \frac{F(t)}{M}.$$

El factor $\frac{F(t)}{M} = -\frac{k}{M}x + \frac{|\alpha|}{M}x^2$ puede aproximarse a:

$$\frac{F(t)}{M} \approx -\frac{k}{M}x_1 + \frac{Bk}{M} - \frac{2|\alpha|B}{M}x_1 + \left(-\frac{Ak}{M} + \frac{2|\alpha|Ax_1}{M}\right)\cos(\omega t) + \left(-\frac{2Bk}{M} + \frac{4|\alpha|Bx_1}{M} + \frac{|\alpha|A^2}{M}\right)\cos^2(\omega t) + \cdots +$$

Igualando términos semejantes, obtenemos:

$$4\omega^2 B = -\frac{k}{M}x_1 + \frac{Bk}{M} - \frac{2|\alpha|B}{M}x_1,$$

$$-8\omega^2 B = -\frac{2Bk}{M} + \frac{4|\alpha|Bx_1}{M} + \frac{|\alpha|A^2}{M};$$

Resolviendo en el caso especial $\omega^2 = \omega_0^2 = k/M$:

$$x_1 = \frac{|\alpha|A^2}{2M\omega_0^2};\;\; B \approx -\frac{|\alpha|A^2}{6M\omega_0^2}.$$

1.86 *Péndulo Generalizado.* Demostrar que la energía potencial de un péndulo puede escribirse como

$$E_p = 2mgl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Hallar el periodo de este sistema si el ángulo inicial de movimiento es θ_0.

R. Con respecto al punto de sujeción, la energía potencial gravitacional de la pesa es:

$$E_p = mgh = mgl(1-\cos\theta) = 2mgl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

El periodo de movimiento puede obtenerse adaptando la fórmula del tiempo de recorrido entre dos puntos

$$t_{A\to C} = \int_A^C \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}.$$

En este caso, la energía total (inicial) de movimiento es: $E = 2mgl\sin^2(\theta_0/2)$, y el diferencial de longitud de recorrido puede aproximarse según $dx = ld\theta$. El tiempo que le tomaría a la pesa en recorrer una distancia angular entre $-\theta_0$ y $+\theta_0$ es:

$$t_{(-\theta_0\to+\theta_0)} = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{ld\theta}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(2mgl\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - 2mgl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}},$$

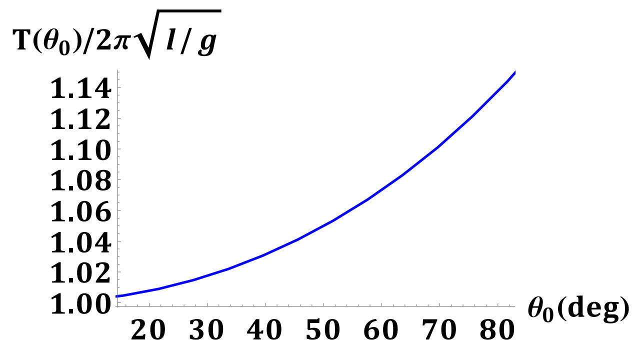
el cual corresponde a la mitad de un periodo. El periodo se obtiene integrando:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

La solución de esta integral se expresa en términos de funciones matemáticas especiales. Algunos valores numéricos representativos se ilustran en la siguiente tabla.

θ_0	1°	5°	15°	20°	25°	30°	45°
$\frac{T}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$	1.00002	1.00048	1.0043	1.00767	1.01203	1.01741	1.03997

El periodo del péndulo tiende a incrementar su valor en función del ángulo inicial de desplazamiento. La relación $T/2\pi\sqrt{l/g}$ se aproxima a la unidad para valores de θ_0 menores a 15°, como es usual en este caso.



1.5. El Oscilador Amortiguado

Una aproximación más realista al movimiento oscilatorio de los cuerpos consiste en introducir el efecto de la fuerza fricción $\overrightarrow{F_f} = -b\vec{v}$, en donde b es la constante de amortiguación en unidades de kg/s. b corresponde en general a un factor de estructura que depende de la geometría del cuerpo y la viscosidad del medio. $\vec{v}$ es la velocidad instantánea del cuerpo y el signo (-) indica que esta fuerza se opone al movimiento relativo del objeto. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema con una constante de restitución K y masa M se resumen en la siguiente tabla:

FÓRMULAS IMPORTANTES, MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO

Posición	$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \phi)$
Amplitud	$A(t) = Ae^{-\gamma t}, \quad \gamma = \frac{b}{2M}.$
Frecuencia de Oscilación	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
Energía Total del Oscilador en función del tiempo	$E = E_0 e^{-2\gamma t}$
Factor de Calidad	$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$

en donde ω es la frecuencia de vibración del sistema CON amortiguación, y ϕ corresponde a la fase inicial.

EJEMPLOS: OSCILACIONES AMORTIGUADAS

1.87 *Oscilador Amortiguado I.* Un objeto oscila sin amortiguamiento con un periodo $T_1 = 1.5$ s. Si se considera el efecto de la fricción del aire, el periodo aumenta en $T_2 = 1.50015$ s. Encontrar el número de ciclos necesarios para que la energía del sistema se reduzca en un 25% de su valor inicial. Hallar el factor de calidad del sistema.

R. El factor de calidad puede calcularse desde la relación:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

De la última relación, se obtiene el factor de calidad: $Q = 35.36$. Si la energía decrece en un 25%:

$$E(t^*) = 0.75E_0 = E_0 e^{-2\gamma t^*},$$

con $t^* = NT_2$.

$$\ln 0.75 = -2\gamma N T_2.$$

En términos del factor de calidad $\gamma = \omega_0/2Q = \pi/QT_1$, la última ecuación se reduce a:

$$\ln 0.75 = -2\pi N \frac{T_2}{QT_1}.$$

Despejando, $N = 1.6188$.

1.88 *Oscilador Amortiguado II.* En el caso de un oscilador amortiguado, la cantidad $\tau = 1/(2\gamma)$ se denomina *tiempo de relajación*. (a) Calcular el cambio en la amplitud después de un tiempo τ. (b) Expresar, como una función de τ, el tiempo necesario para que la amplitud decrezca en un 50%. (c) Obtener la fracción de energía disipada en forma de calor después un tiempo 2τ.

R. La amplitud de movimiento es una función del tiempo:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

(a) Después de un tiempo τ,

$$A(\tau) = A_0 e^{-\gamma\tau} = A_0 e^{-1/2} = 0.606A_0.$$

La amplitud disminuye en un 39.3%. (b) El tiempo necesario para que la amplitud decrezca en un 50% se calcula como:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\gamma t}$$

Despejando t:

$$\frac{1}{\gamma}\ln 2 = t = 2\tau \ln 2$$

c) La energía disipada en función del tiempo es: $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. Después de un tiempo 2τ:

$$E(t) = E_0 e^{-4\gamma\tau} = E_0 e^{-2} = 0.1353 E_0.$$

La fracción de energía disipada en forma de calor después de dos tiempos de relajación corresponde al 86.46%.

1.89 *Sistema de Péndulo Amortiguado.* Un péndulo simple tiene un periodo de 2 s y una amplitud de 2°. Después de 10 oscilaciones completas su amplitud ha sido reducida a 1,25°. Hallar la constante de amortiguamiento γ.

R. $A(10T) = 1.25 = 2e^{-10\gamma T}$. Para T = 2 s, $1.25 = 2e^{-20\gamma}$; $\gamma = 0.02350$ (1/s).

1.90 *Oscilador Amortiguado III.* Un cuerpo de 2 kg oscila con una amplitud inicial de 3 cm acoplado a un muelle de constante elástica $K = 400$ N/m. Si la energía disminuye en 1% por periodo, hallar la constante de amortiguamiento b y el factor Q.

R. La energía por periodo es $E(T) = E_0 e^{-2\gamma T}$. Si la energía disminuye en un 1% por periodo, $\gamma T = 0.00502$. De la relación: $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Multiplicando por el Periodo de oscilación del sistema T (con amortiguamiento):

$$(\omega T)^2 = (\omega_0 T)^2 - (\gamma T)^2 = (2\pi)^2.$$

Reemplazando $\omega_0 = \sqrt{K/M} = 14.14\ r/s$ y $\gamma T = 0.00502$, obtenemos $T = 0.44$ s. El parámetro $\gamma = 0.0114$. La constante de amortiguamiento b se calcula desde γ: $\gamma = b/2M$; $b = 2M\gamma = 0.0456$ kg/s. El factor Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 620.3.$$

1.91 *Energía Disipada en el movimiento Amortiguado.* Si la amplitud de un movimiento amortiguado se reduce a 96% de su valor después de cada oscilación, en cuanto se reduce su energía?
R. La fórmula de la amplitud de un movimiento amortiguado es:

$$A(t) = Ae^{-\gamma t}.$$

Después de un periodo, $A(T) = Ae^{-\gamma T} = 0.96A$. Así, $\gamma T = 0.041$. Esta información es suficiente para calcular la reducción en la energía por ciclo, desde la expresión:

$$E(T) = E_0 e^{-2\gamma T} = E_0 e^{-2(0.041)} = 0.92 E_0.$$

La energía se reduce a **92%** después del primer ciclo.

1.92 El impulso sobre el agua de una embarcación de 700 kg de masa a una velocidad constante de 1 m/s requiere una fuerza constante de 120 N. Suponga que la fuerza de amortiguación que ejerce el agua está dada por $\boldsymbol{F}_A = -b\boldsymbol{v}$. (a) Determine el valor de *b.* (b) Se

amarra el bote a dos postes mediante dos sendos resortes y se mantiene a dos metros de su posición de equilibrio mediante una fuerza horizontal de 450 N. Escriba la ecuación de movimiento del bote después de ser liberado en $t = 0$.
R.

(a) Si el bote viaja a velocidad constante, su aceleración es cero ($\boldsymbol{a} = 0$), y la fuerza externa aplicada debe ser igual a la fuerza de amortiguación ejercida por el agua:

$$b = \frac{F_A}{v} = 120\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

(e) Suponiendo que los resortes son idénticos, en la posición de equilibrio, la fuerza neta (450 N) debe ser igual a $2Kd$, en donde K es la constante elástica de los muelles, y $d = 2$ m. Así, $K = 112.5$ N/m. Una vez liberado el bote, la ecuación de movimiento alrededor de su posición de equilibrio es:

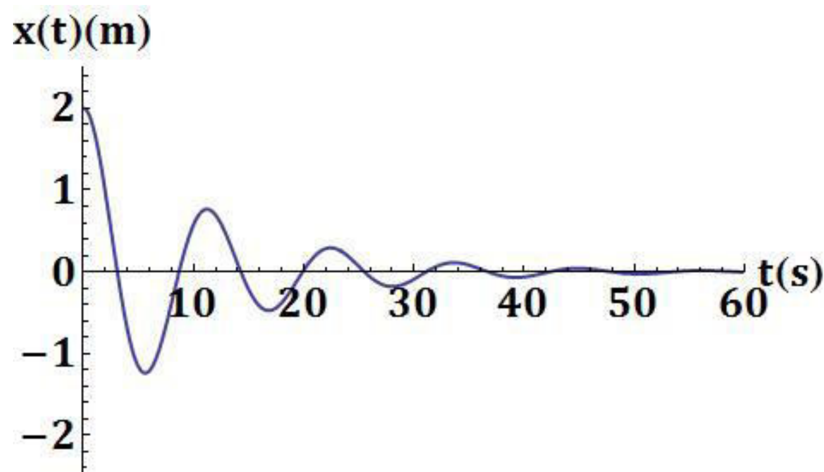
$$-bv - 2Kx = Ma.$$

Numéricamente,

$$0 = 700\frac{d^2x}{dt^2} + 120\frac{dx}{dt} + 225x.$$

La solución de esta ecuación, con la condición inicial establecida es:

$$x(t) = \frac{2}{57}e^{-3t/35}\left(57\cos\left[\frac{9\sqrt{19}t}{70}\right] + 2\sqrt{19}\sin\left[\frac{9\sqrt{19}t}{70}\right]\right).$$



Posición del bote como función del tiempo. Obsérvese que el movimiento prácticamente se detiene después de unos 60 segundos.

1.93 *Factor de Calidad I.* Un oscilador amortiguado posee un factor de calidad $Q = 10$, masa $M = 1$ kg y constante elástica $K = 300$ N/m. Calcular el cambio en la amplitud de oscilación del sistema después de dos ciclos.
R. Después de dos ciclos, tendremos que la amplitud es: $A(2T) = A_0e^{-2\gamma T}$. Desde la relación

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 17.3\ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

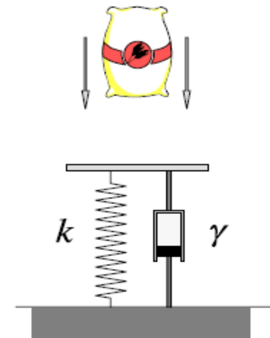
Con el periodo de oscilación: $T = 0.36$ s y constante de amortiguación $\gamma = 0.86$ r/s La amplitud después de dos periodos toma el valor: $A(2T) = 0.54A_0$. La amplitud disminuye en un 44% después de dos ciclos.

1.94 *Factor de Calidad II.* Un oscilador tiene un factor $Q = 200$. En qué porcentaje disminuye su energía durante un periodo?
R. En este caso, es suficiente con calcular el factor $e^{-2\gamma T}$, que indica la relación entre la energía después de un tiempo $t + T$ y la energía en el instante de tiempo t, es decir, el cambio energético después de un periodo T. En términos del factor de calidad, utilizamos la expresión que se deduce desde la definición de frecuencia de las oscilaciones amortiguadas y Q.

$$2\gamma T = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

Numéricamente obtenemos: $2\gamma T = 0.031416$ y $e^{-2\gamma T} = 0.97$. El porcentaje de energía disminuye en un 3%.

1.95* *Sistema muelle-amortiguador.* Un saco de harina de 60 kg cae libremente desde una altura $h = 1$ m sobre una plataforma horizontal de masa despreciable. Se requiere diseñar un dispositivo resorte-amortiguador de tal forma que después del impacto la plataforma y el saco se sitúen en una posición de equilibrio 15.1 cm por debajo de la posición inicial tan rápido como sea posible. Calcular la constante elástica k del resorte y el coeficiente de amortiguamiento γ.



R. Consideremos inicialmente el sistema SIN amortiguamiento ($b \to 0$), con el propósito de obtener un orden de magnitud de la constante elástica requerida en el diseño. Si la plataforma debe detenerse $y_0 = 15.1$ cm por debajo de su posición de equilibrio, entonces la desaceleración que experimenta el saco de harina, al caer desde 1 m de altura y entrar en contacto con la plataforma es:

$$a = \frac{v_0^2}{2y_0} = \frac{gh}{y_0} = 6.62g = 64.90\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

el cual se obtiene utilizando ecuaciones cinemáticas simples. El resorte se comprime una distancia y_0 y su constante elástica está dada por:

$$Mg(h + y_0) = \frac{1}{2}ky_0^2, \quad k = \frac{2Mg(h + y_0)}{y_0^2}.$$

Reemplazando los datos numéricos, la constante elástica debe tomar un valor máximo de: $k = 59.36 \times 10^3$ N/m. La frecuencia natural de vibración es: $\omega_0 = \sqrt{k/M} = 31.45$ r/s. Si consideramos el sistema funcionando UNICAMENTE con el amortiguador ($k \to 0$), éste deberá soportar una fuerza de:

$$F = Ma = \frac{Mgh}{y_0} = 3984\ \text{N}.$$

Dado que la velocidad del sistema cambia desde un valor $v_0 = \sqrt{2gh} = 4.43$ m/s hasta un valor cero en cierto intervalo de tiempo (sin definir en este caso, aunque este dato no es relevante en nuestro análisis), cuando el cuerpo finalmente se detiene, el valor mínimo de la constante de amortiguamiento γ se obtiene desde la relación:

$$F_b = bv_0 = 2\gamma M v_0 = Ma = \frac{Mgh}{y_0},$$
$$\gamma = \frac{gh}{2v_0 y_0} = 7.33\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}.$$

Se observa inicialmente que $\omega_0 > \gamma$, el cual corresponde al régimen sub-amortiguado. En el régimen críticamente amortiguado con $\omega_0 = \gamma$ el sistema llega rápidamente al equilibrio y pueden despreciarse los efectos oscilatorios. Las frecuencias naturales de vibración varían en un rango entre **7.33** y **31.45** r/s correspondientes a constantes elásticas entre **3223** y **59360** (N/m) y constantes de amortiguación $b = 879.6$ kg/s, $b = 3774$ kg/s. Este análisis corresponde a la primera aproximación de diseño del conjunto muelle-amortiguador bajo las condiciones requeridas. Un cálculo más detallado involucra la solución total de la ecuación diferencial que rige el movimiento del cuerpo hasta que se detiene en su posición de equilibrio y_0. Para $\omega_0 = \gamma$, la ecuación de movimiento del cuerpo se define como:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = Mg;$$

o de forma equivalente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g;$$

con las condiciones iniciales: $y(0) = 0$, y $dy(0)/dt = v_0$. La solución para la aceleración en función del tiempo es:

$$a(t) = (g - 2v_0\omega_0 + (v_0\omega_0^2 - g\omega_0)t)e^{-\omega_0 t},$$

mientras que para la velocidad instantánea y la posición del cuerpo se obtienen las expresiones:

$$v(t) = \left((g - v_0\omega_0)t + v_0\right)e^{-\omega_0 t},$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)\left(g(e^{\omega_0 t} - 1) + \omega_0 t(\omega_0 v_0 - g)\right)e^{-\omega_0 t}.$$

El tiempo necesario que transcurre para que la velocidad del cuerpo tome el valor de cero es:

$$t^* = \frac{v_0}{v_0\omega_0 - g} > 0.$$

Resolviendo numéricamente para $y(t)$ y $v(t)$ se obtiene $\omega_0 = 12.37\ r/s$, el cual corresponde a una constante elástica $k = 9181$ N/m. En el régimen sobreamortiguado $b > 2M\omega_0$. La solución en este caso puede es:

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

con las raíces $r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ reales y negativas $[\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma]$. El sistema no oscila y tiende a alcanzar asintóticamente la posición de equilibrio y_0. Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $v(0) = v_0 = \sqrt{2gh}$.

$$A = -B,$$

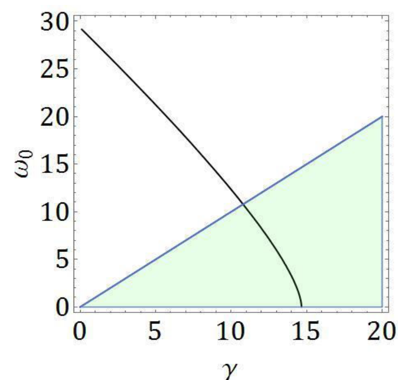
$$v_0 = Ar_1 + Br_2.$$

$$A = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

El saco se detendrá después de un tiempo

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \ln\left[\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right],$$

y debería alcanzar una posición $y(t') = 0.151$ m. La solución numérica se ilustra en la figura adjunta. Los valores definidos por la línea en la región sombreada corresponden al régimen sobreamortiguado, y el mínimo valor de la constante de amortiguación para el cual se satisface esta condición está definido por la intersección $\gamma = \omega_0 \approx 10.8$ r/s. En este caso: $k = 6998.4$ N/m.



1.96 *Un oscilador amortiguado* pierde el 2% de su energía en cada ciclo. (a) Cuál es su factor Q? (b) Si su frecuencia de resonancia es de 300 Hz, cuál es el ancho de banda $\Delta\omega$ cuando el oscilador está impulsado?

R. La energía de un oscilador amortiguado es: $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. En un ciclo, su energía se reduce en un 2%, por lo tanto:

$$E(T) = 0.98E_0 = E_0 e^{-2\gamma T}.$$

$$0.98 = e^{-2\gamma T}.$$

$$2\gamma T = 0.0202.$$

Utilizamos la relación entre el factor de calidad y $2\gamma T$:

$$2\gamma T = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = 0.0202$$

Despejando $Q = 311.5$. (b) El ancho de banda se aproxima a:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{300}{311.5} = 0.96\ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

1.97 *Si el factor de calidad* de un oscilador amortiguado es $Q = 100$, obtener el porcentaje de la energía disipada en cuatro (4) ciclos.

R. La energía presente en un movimiento amortiguado se estima según: $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. En 4 ciclos:

$$E(4T) = E_0 e^{-4(2\gamma T)}.$$

De la relación de γ y Q:

$$2\gamma T \approx \frac{2\pi}{Q} = 0.0628$$

$$E(4T) = E_0 e^{-4(2\gamma T)} = 0.78 E_0.$$

La energía disipada en cuatro ciclos es del orden de 22%.

1.98 *Considere un oscilador amortiguado* con frecuencia angular propia $\omega_0 = 100$ rad/s, y cuya constante de amortiguamiento es $\gamma = 7.0$ r/s. Si la partícula parte de la posición $x_0 = 5$ m con velocidad inicial $v_0 = 0$, escribir la ecuación de la posición de la partícula.

R. La solución general para una oscilación amortiguada es:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi).$$

La frecuencia de oscilación se calcula como:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{100^2 - 7.0^2} = 99.75\ \frac{r}{s}.$$

La función de velocidad se obtiene derivando $v(t) = dx(t)/dt$.

$$v(t) = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi).$$

Para $t = 0$, la velocidad inicial es cero. Obtenemos así:

$$0 = -\gamma\cos\varphi - \omega\sin\varphi.$$

$$\tan\varphi = -\frac{\gamma}{\omega}; \quad \varphi = -4.01.$$

La posición inicial $x_0 = 5$ m, y el valor de la fase inicial permiten obtener la constante A:

$$5 = A\cos\varphi = \mathrm{A}\cos(-4.01),$$

$$A = 5.01 \text{ m}$$

La solución total puede escribirse como:

$$x(t) = 5.01e^{-7t}\cos\left(99.75t - \frac{\pi}{45}\right) \text{ m}.$$

Nota: Si consideramos $v(0) = v_0$, entonces $A = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma v_0 x_0 + x_0^2\omega_0^2}/\omega$.

1.99 *Un bloque suspendido* de un resorte oscila con una amplitud inicial de 120 mm. Después de 2.4 minutos la amplitud ha disminuido hasta 60 mm. Cuándo la amplitud de oscilación será de 15 mm?

R. La amplitud de oscilación decae en el tiempo como:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Después de 2.4 min (144 segundos) la amplitud se reduce a la mitad de su valor inicial, entonces:

$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma(144)}; \quad \gamma = 4.81 \times 10^{-3}\ (1/s).$$

Después de un tiempo t^*, la amplitud toma el valor de 15 mm:

$$A(t^*) = 15 = 120 e^{-\gamma t^*} \text{mm}.$$

Reemplazando γ y despejando t^*, tendremos: $t^* = 432\ s$ (7.2 min).

1.6. El Oscilador Forzado

Estudiaremos ahora la dinámica de un oscilador unidimensional bajo los efectos de una fuerza externa $F_e(t)$ y la fuerza de fricción $-b(dx/dt)$. La ecuación del movimiento en este caso es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_e(t)}{M}.$$

Si la fuerza exterior aplicada $F_e(t)$ es periódica con frecuencia ω, y de la forma $F_e(t) = F_0\cos(\omega t)$, entonces la solución en régimen para la posición del cuerpo $x(t)$ es:

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi).$$

La amplitud de oscilación y el factor de fase dependen de la frecuencia de la fuerza exterior ω. En forma explícita se obtienen las relaciones:

Amplitud	$A(\omega) = \dfrac{F_0}{M\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
Fase	$\tan\varphi = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
Amplitud en Resonancia [Valor Aproximado]	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{2M\gamma\omega_0}$

Ancho de Banda **[Valor Aproximado]**	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
Potencia Promedio	$\langle P \rangle = \gamma M \omega^2 A^2$
Potencia Promedio en Resonancia	$\frac{F_0^2}{2b}, \quad \frac{F_0^2}{4M\gamma}, \frac{F_0^2}{2M\Delta\omega}.$
Frecuencia de Resonancia en $A(\omega)$ **[Valor Exacto]**	$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
Amplitud en Resonancia **[Valor Exacto]**	$A(\omega_R) = \frac{F_0}{2M\gamma\omega_R}$
$\boldsymbol{P(\omega_R)}$	$P(\omega_R) = \frac{F_0^2\omega_R^2}{4M\gamma(\omega_R^2 + \gamma^2)}$
Límites del Ancho de Banda **[Valores Exactos]**	$\omega^{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \pm \gamma$

1.100 *Calcular el valor rms de la potencia* instantánea absorbida por un oscilador forzado sin amortiguamiento sometido a la acción de una fuerza $F(t) = F_0\cos(\omega t)$.

R. La definición de potencia instantánea es $P(t) = F(t)v(t)$. El valor máximo de este producto es $P_{máx} = F_0 A\omega/2$, mientras que el valor rms es: $P_{rms} = P_{máx}/\sqrt{2}$, con la amplitud de oscilación definida como: $A = F_0/M(\omega^2 - \omega_0^2)$. La potencia promedio absorbida por el oscilador en este caso es cero.

1.101 *Encontrar los valores límites* de la amplitud y la fase de un oscilador forzado con amortiguamiento cuando (a) la frecuencia de la fuente es mucho menor que ω_0 (b) La frecuencia de la fuente es mucho mayor que ω_0. Determinar los factores dominantes en cada caso.

R. (a) $\omega_0 \gg \omega$

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M\omega_0^2}\left(1 - 2\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2}\right)^2\right).$$

Predomina el efecto de restitución, con una pequeña corrección del orden de $(\gamma\omega/\omega_0^2)^2$ asociada al amortiguamiento.

(b) $\omega_0 \ll \omega$

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M\omega^2}\left(1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right),$$

con $\gamma \ll \omega$. Predominan los efectos de la fuerza exterior.

1.102 *Energía potencial y energía cinética.* Hallar los valores promedio de las energías cinética y potencial de las oscilaciones de un oscilador forzado con amortiguamiento.

R. Calculamos el valor promedio de la energía cinética: $\langle K\rangle = \frac{1}{2}MA^2\omega^2\langle\sin^2(\omega t + \varphi)\rangle$, y la energía potencial:

$$\langle U\rangle = \frac{1}{2}M\omega_0^2 A^2\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle.$$

$$\langle K\rangle = \frac{1}{4}MA^2\omega^2; \qquad \langle U\rangle = \frac{1}{4}MA^2\omega_0^2.$$

El valor del trabajo hecho por la fuerza sobre el sistema en un periodo:

$$W = -\int_0^T F_e(t)v(t)dt =$$

$$= \int_0^T F_0 A\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{F_0 A\omega T\sin\varphi}{2} = M\gamma\omega^2 A^2 T.$$

En proximidades de la frecuencia de resonancia, la magnitud de la relación $(\langle K\rangle + \langle U\rangle)/W$ es:

$$\left.\frac{\langle K\rangle + \langle U\rangle}{W}\right|_{\omega\to\omega_0} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\text{Energía almacenada por ciclo}}{\text{Energía suministrada por ciclo}}$$

Esta cantidad proporciona una idea del funcionamiento del oscilador en términos de la energía disipada por ciclo, i.e., el factor de calidad está definido en términos de la razón de la energía almacenada en el resonador con la energía necesaria suministrada por el generador por ciclo, manteniendo la amplitud de la señal constante a la frecuencia de resonancia.

1.103 *Un oscilador forzado* con amortiguamiento posee las siguientes características: b = 2 kg/s, $\omega_0 = 20\pi$ rad/s, F_0 = 1 N, M = 1 kg. Calcular la potencia mecánica promedio transmitida al oscilador cuando $\omega = 2\omega_0$.

R. Utilizamos

$$\langle P \rangle = \frac{b\omega^2 F_0^2}{2[M^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+b^2\omega^2]}.$$

Si $\omega = 2\omega_0$; $\langle P \rangle = \frac{2bF_0^2}{[9M^2\omega_0^2+4b^2]} = 1.13 \times 10^{-4}$ W.

1.104 *Oscilador forzado.* Un oscilador forzado con amortiguamiento posee las siguientes características: $b = 20$ kg/s, ω_0 = 200π rad/s, $F_0 = 10$, M = 1 kg. Calcular:

a) *El factor de calidad Q.*

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = M\frac{\omega_0}{b} = 10\pi$$

b) *El ancho de banda $\Delta\omega$.*

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 20 \text{ r/s}$$

La potencia mecánica promedio absorbida por el oscilador cuando la frecuencia de la fuerza externa es $2\omega_0$.

$$\langle P \rangle = \frac{b\omega^2 F_0^2}{2[M^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+b^2\omega^2]}.$$

Si $\omega = 2\omega_0$, $\langle P \rangle = \frac{2bF_0^2}{[9M^2\omega_0^2+4b^2]} = 1.13 \times 10^{-3}$ W.

c) *Angulo de fase ϕ entre la fuerza aplicada $F(t)$ y el desplazamiento $x(t)$, si la frecuencia de la fuerza externa es* $2\omega_0$.

$$\tan(\phi) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}; \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{15\pi}\right) \sim 1.2^0 .$$

1.105 *Oscilador Amortiguado.* Calcular el número de ciclos necesarios para que un oscilador amortiguado disipe el 25% de su energía total, si éste posee un factor de calidad Q igual a 100.
R. La energía del oscilador amortiguado está dada por $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. El número de ciclos necesarios (NT) para que la energía se disipe en un 25% se puede obtener de la relación: $0.75E_0 = E_0 e^{-2\gamma NT}$. Así, $N = (1/2\gamma T)\ln(4/3)$. Es posible demostrar que el producto γT es $\pi/\sqrt{Q^2-1/4}$. Reemplazando los valores numéricos, tenemos ***N ~ 4.58*** ciclos.

1.106 *Oscilador Amortiguado.* Un bloque de 750 g oscila en el extremo de un resorte cuya constante de restitución es K = 56 N/m. La masa se mueve en un fluido el cual ofrece una fuerza resistiva del tipo $F = -bv$, en donde $b = 0.162$ Ns/m. (a) Cuál es el periodo de movimiento?.

(b) Cuál es decrecimiento fraccional de la amplitud por ciclo?. (c) Escribir la ecuación del desplazamiento en función del tiempo, si en $t = 0$, $x = 0$ y en $t = 1.00$ s, $x = 0.120$ m.

R. (a) El periodo de oscilación se obtiene desde $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{K/M - (b/2M)^2} = 0.73\ s$. (b) En un ciclo, la amplitud decrece en un factor $e^{-\gamma T} = e^{-bT/2M} = 0.92$. La amplitud decrece aproximadamente en un 8%. (c) La expresión para el desplazamiento del bloque toma la forma: $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t)$, con $A = 0.183$ m.

1.107 *Frecuencia Crítica.* Una masa de 0.4 kg se mueve en el extremo de un resorte con k = 300 N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_X = -bv$. (a) Si $b = 9$ kg/s, calcular la frecuencia de oscilación del sistema. (b) Con qué valor de b la amortiguación será crítica?. (c) Calcular el porcentaje de energía mecánica total disipada después de 10 segundos.

R.

a) Frecuencia del sistema: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 24.97$ r/s.
b) La amortiguación será crítica con $b = 21.9$ kg/s. $(\omega_0 = \gamma)$.
c) Porcentaje de la energía disipada: $E(10)/E_0 = e^{-20\gamma} = e^{-20\gamma} \sim 0$.
   La energía se ha disipado en su totalidad después de 10 segundos.

1.108 *Disipación de la energía.* Si la energía de un oscilador amortiguado ha disipado un 50% del valor inicial con γ = 1 r/s, hallar el tiempo transcurrido.

R. En este caso, si la energía remanente en el sistema es $0.5E_0$, entonces el tiempo transcurrido es: $0.5E_0 = E_0 e^{-2\gamma t}$. Despejando t, obtenemos (γ = 1 r/s): $t = \frac{1}{2}\ln(2)$. Es decir, el sistema ha disipado el 50% de su energía después de 0.35 segundos.

1.109 *Péndulo Forzado.* Un péndulo simple de 0.5 m de longitud y $Q = 400$ está acoplado a un sistema que le aplica una fuerza de magnitud $F_0 = 2 \times 10^{-3}$N. Si la masa del péndulo es 0.2 kg, calcular (a) el ancho de banda, (b) la amplitud del péndulo a la frecuencia de resonancia.

R. (a) El ancho de banda se define como $\Delta\omega = \omega_0/Q = \sqrt{g/l}/Q$= 0.01 (1/s). (b) La amplitud a la frecuencia de resonancia es

$$A(\omega_0) = QF_0 l/mg = 0.2 \text{ m}.$$

1.110 *Factor de Calidad.* Un oscilador amortiguado posee un factor de calidad $Q = 10$, masa $M = 1$ kg y constante elástica $K = 300$ N/m. Calcular el cambio en la amplitud de oscilación del sistema después de dos ciclos.
R. La amplitud después de dos periodos es:

$$A(2T) = A_0 e^{-2\gamma T}.$$

Si el factor de calidad es igual a 10, entonces:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \rightarrow 2\gamma = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Multiplicando por T (periodo) en ambos lados de la última ecuación, tenemos:

$$2\gamma T=\frac{\omega_0 T}{Q}=\frac{2\pi}{\omega}\frac{\omega_0}{Q}.$$

Utilizando la fórmula $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$. Finalmente:

$$2\gamma T=\frac{2\pi}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{2\pi}{Q}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{Q^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}.$$

Se demuestra que el término $2\gamma T$ depende exclusivamente del factor de calidad y no depende de la masa, ni de la constante elástica. Numéricamente $2\gamma T=0.63$, y la amplitud es: $A(2T)=A_0e^{-2\gamma T}=A_0e^{-0.63}=0.53A_0$. Después de dos ciclos, la amplitud ha disminuido en un 47%.

1.111 *Resonancia.* Un oscilador forzado con amortiguamiento posee las siguientes características: $b=2$ kg/s, $\omega_0=20\pi$ rad/s, $F_0=1$ N, $M=1$ kg. Calcular la potencia mecánica promedio transmitida al oscilador cuando (a) $\omega=\omega_0$. (b) $\omega=0.5\omega_0$.
R.

(a) En resonancia ($\omega=\omega_0$) la potencia promedio transmitida es:

$$\langle P\rangle=\frac{F_0^2}{2b}=0.25\text{ W}.$$

(b) Para ($\omega=0.5\omega_0$), reemplazamos en:

$$\langle P\rangle=\frac{b\omega^2F_0^2}{2M^2}\frac{1}{[(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2]}=1.13\times10^{-4}\text{W}.$$

Si la frecuencia de oscilación es la mitad de frecuencia de resonancia, el sistema absorbe una potencia que es del orden de 3 órdenes de magnitud menor que aquella absorbida en resonancia. Esto puede entenderse en términos de un ancho de banda suficientemente estrecho: $\Delta\omega=b/M=2$ r/s.

1.112 *Movimiento Forzado.* Un objeto de masa 0.2 kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es de 80 N/m. El cuerpo está sujeto a la acción de una fuerza de fricción dada por $-bv$, donde v es su velocidad (m/s) y $b=4$ kg/s. (a) Hallar el periodo de las oscilaciones de este sistema. (b) Si el cuerpo se somete a una fuerza exterior dada por $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, con $F_0=2$ N y $\omega=30$ r.s^{-1}, cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas?.

a) $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}-\left(\frac{b}{2M}\right)^2}}=0.363\ s.$

b) $A(\omega)=\frac{F_0/M}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}=1.28$ cm.

1.113 *Un cuerpo de* 0.2 kg de masa está unido al extremo de un resorte de constante elástica K = 5 N/m, que tiene el otro extremo fijo. Se separa el cuerpo a **8 m** de su posición de equilibrio y se abandona, comenzando a contar tiempos en ese instante. Hallar:

a) La ecuación del movimiento del cuerpo.
b) Las energías cinéticas y potencial del sistema cuando la elongación es $1/\sqrt{2}$ del valor máximo.

A continuación se aplica al cuerpo una fuerza de rozamiento $F_R = -0.2v$ y una fuerza impulsora $F(t) = 8\cos(6t)$. Una vez el sistema alcanza el estado estacionario, hallar:

c) La ecuación del movimiento resultante.
d) La potencia media absorbida por el oscilador.
e) El ancho de banda del sistema.

R. (a) Si $M = 0.2$ kg y $K = 5$ N/m, $\omega_0 = \sqrt{K/M} = 5$ r/s. La ecuación de movimiento del cuerpo es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0,$$

el cual tiene como solución $x(t) = 8\cos(25t)$ (m) (b) La energía cinética del cuerpo para un desplazamiento $x = A/\sqrt{2} = 8/\sqrt{2}$ es:

$$E_K = \frac{1}{2}M\omega^2(A^2 - x^2) = 80 \text{ J}.$$

La energía potencial en ese punto es $U = \frac{1}{2}Kx^2 = 80$ J. (c) El movimiento es forzado con amortiguamiento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 25x = 40\cos(6t).$$

(d) Utilizamos

$$\langle P \rangle = \frac{b\omega^2 F_0^2}{2[M^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2]} = 36.69 \text{ W}.$$

(e) El ancho de banda se calcula utilizando la relación:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\gamma = \frac{b}{M} = 1\ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

1.114 *Un objeto de* 0.2 kg está acoplado a un resorte de constante elástica 80 N/m. El objeto está sometido a una fuerza resistiva – bv, en donde v es la velocidad en metros por segundo. (a) Si la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas es $\sqrt{3}/2$ veces la frecuencia de las oscilaciones naturales del sistema, calcular el valor de b. (b) Calcular el factor de calidad Q. (c) En qué porcentaje se reduce la amplitud después de 10 ciclos completos?.
R. (a) Partimos de la expresión:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

con $\omega = \sqrt{3}\omega_0/2$;

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{3}{4}\omega_0^2, \quad \gamma = \frac{\omega_0}{2}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{K/M} = \sqrt{80/0.2} = 20; \ \ \gamma = 10\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}.$$

La constante b se obtiene como $2\gamma M = b = 4$ kg/s. (b) El factor de calidad $Q = \omega_0/2\gamma = 1$. (c) Después de 10 ciclos completos, la amplitud se reduce según:

$$\gamma T = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \ 10\gamma T = \frac{20\pi}{\sqrt{3}} = 36.28.$$

La amplitud cambia

$$A(10T) = A_0 e^{-10\gamma T} = 1.76 \times 10^{-16} A_0,$$

i.e., el sistema se atenúa prácticamente por completo después de 10 ciclos.

1.115 *Un cuerpo de 0.1* kg de masa está unido al extremo de un resorte de constante elástica K **=** 5 N/m, que tiene el otro extremo fijo. Se separa el cuerpo a 0.50 m de su posición de equilibrio y se abandona, comenzando a contar tiempos en ese instante. Hallar:

a) La ecuación del movimiento del cuerpo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 50x = 0.$$

Solución:

$$x(t) = 0.50\cos\left(\sqrt{50}t\right)\ (\mathrm{m}).$$

b) Las energías cinéticas y potencial del sistema cuando la elongación es la mitad del valor máximo.

R.

$$E_K = \tfrac{1}{2}M\omega^2(A^2 - x^2) = \tfrac{1}{2}M\omega^2(A^2 - (A/2)^2) = \tfrac{3}{8}M\omega^2A^2 = 0.468\ \ \mathrm{J}.$$

$$U = \tfrac{1}{2}Kx^2 = 0.5 \times 5 \times 0.25^2 = 0.156\ \mathrm{J}.$$

A continuación se aplica al cuerpo una fuerza de rozamiento $F_R = -0.2v$ (N) y una fuerza impulsora

$$F(t) = 1.0\cos(6t)\ \ (\mathrm{N})$$

Una vez el sistema alcanza el estado estacionario, hallar: c) La amplitud de movimiento. Utilizamos la definición de la amplitud para un oscilador forzado

$$A(\omega) = \frac{(F_0/M)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = 0.54 \text{ m}$$

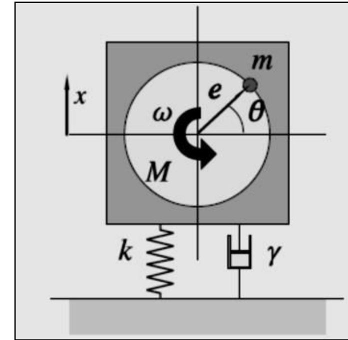
d) La potencia media absorbida por el oscilador.

$$\langle P \rangle = {}^{b\omega^2 A^2}/_{2} = 1.05 \text{ W}$$

e) El ancho de banda del sistema.

$$\Delta\omega = 2\gamma = \frac{b}{M} = \frac{0.2}{0.1} = 2 \ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

1.116 *Vibraciones debido a una máquina rotatoria.* Una máquina que posee una parte rotatoria (motor eléctrico) puede esquematizarse como se muestra en la figura, siendo M la masa total de la máquina, y m una masa equivalente excéntrica (incluida en la masa total M) situada a una distancia e del eje de rotación, de modo que, cuando la máquina está en marcha, se producen vibraciones de la misma frecuencia que la rotación del rotor. **(a)** Encontrar la expresión de la amplitud de las vibraciones verticales de la máquina en función de su velocidad de rotación ω y de las constantes características k, γ. **(b)** Determinar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. **(c)** Determinar la fuerza que se transmite al piso.



(a) R. La fuerza asociada al movimiento de la masa m es $em\omega^2$, la fuerza centrípeta del cuerpo cuya componente vertical es $em\omega^2 \sin\theta$, representa una fuerza "exterior" impulsora con magnitud $F_0 = em\omega^2$. Así, la amplitud de las oscilaciones verticales de la máquina están dadas por:

$$A(\omega) = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{em\omega^2/M}{\sqrt{(\omega^2 - k/M)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

(b) La amplitud de las vibraciones en la frecuencia de resonancia se obtiene maximizando la expresión anterior, dado que F_0 depende de la frecuencia:

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} = 0; \qquad \omega_r = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Obsérvese que esta frecuencia es diferente a ω_0. La amplitud de las oscilaciones en resonancia es calculada reemplazando $A(\omega_r)$:

$$A(\omega_r) = \frac{ekm}{2\gamma M^2} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

(c) La fuerza que se transmite al piso se calcula como la suma de las fuerzas generadas por el resorte y el amortiguador:

$$F_p = kx + 2M\gamma\frac{dx}{dt}.$$

Si consideramos que $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, entonces la fuerza transmitida al piso es:

$$F_p = Ak\cos(\omega t + \varphi) + 2M\gamma\omega A\sin(\omega t + \varphi).$$

La expresión anterior se puede factorizar aplicando relaciones trigonométricas:

$$F_p = A\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}\sin(\omega t + \theta'),$$

en donde θ' es un factor de fase. La amplitud de la fuerza transmitida al piso es:

$$F_M = A\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}.$$

El cociente entre las amplitudes de la fuerza transmitida y de la fuerza impulsora $em\omega^2$ se denomina *transmisibilidad* TR.

$$TR = \frac{F_M}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}}{M\sqrt{(\omega^2 - k/M)^2 + (2\gamma\omega)^2}},$$

el cual define el porcentaje de la fuerza máxima transmitida al piso debido a la rotación del motor a frecuencia ω. Si la frecuencia de rotación es cero, $TR = 1$, mientras que si la constante de amortiguamiento es cero, o muy pequeña,

$$TR \sim \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

1.117 *Un oscilador forzado con amortiguamiento* tiene un ancho de banda de 200 Hz. Si la frecuencia de resonancia del oscilador es de 1 kHz, (a) hallar la diferencia de fase entre la fuerza y el desplazamiento para los valores extremos de las frecuencias en el intervalo $\Delta\omega$.
R. Las frecuencias en los extremos del ancho de banda corresponden a 900 Hz y 1100 Hz respectivamente. De la relación entre el ancho de banda y el factor de amortiguación:

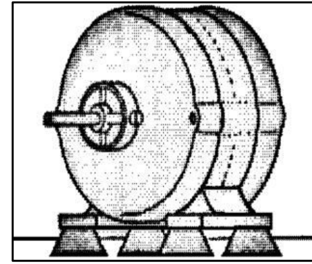
$$\Delta\omega = 2\gamma = 2\pi \times 200 \text{ Hz}.$$

El ángulo de fase corresponde a:

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\pi\Delta\omega f}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2} = \frac{\Delta\omega f}{2\pi\left(f_0{}^2 - f^2\right)}.$$

Para 900 Hz, $\varphi = 43.45°$. Para 1100 Hz, $\varphi = -46.33°$. La diferencia de fase en el intervalo del ancho de banda es:

$$\Delta\varphi \sim 89.78°.$$



1.118 *Estabilización de las vibraciones de un motor*. La mayor parte de los motores eléctricos comerciales no están perfectamente equilibrados, de modo que, cuando el motor está en marcha, se producen vibraciones de la misma frecuencia angular que la del rotor. Deseamos absorber esas vibraciones, para lo cual colocamos el motor sobre cuatro amortiguadores, como se muestra en la figura. Sea M la masa del motor y ω su velocidad angular. Cuál será el valor adecuado de la constante elástica K de cada uno de los amortiguadores para el fin propuesto?.

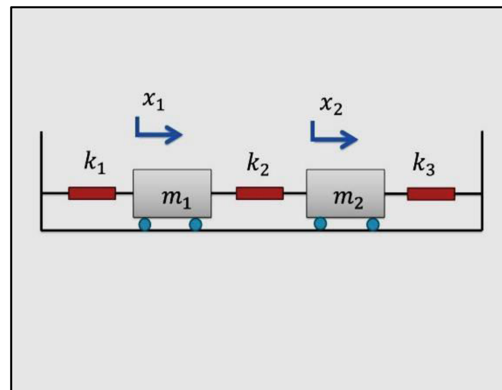
R. La amplitud de las vibraciones motor depende de la frecuencia de rotación del mismo, con:

$$A(\omega) = \frac{F_0/M}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

La fuerza máxima que experimenta el sistema de amortiguación es $F_0 \sim K_{eff} A$, en donde K_{eff} es la constante elástica efectiva de todo el sistema. Esta fuerza debe ser al menos igual al peso de la máquina Mg. Igualando estas expresiones, tendremos:

$$\frac{F_0/M}{\omega^2 - \omega_0^2} \sim \frac{F_0}{K_{eff}},$$

con $M\omega_0^2 = K_{eff} = 4K_p$, en donde K_p corresponde a la constante elástica por amortiguador. Desde la última expresión, el valor óptimo para cada amortiguador debe ser del orden de $K_p = M\omega^2/8$.



1.119 *Sistema acoplado.* (a) Obtener las ecuaciones dinámicas de movimiento en el sistema de osciladores acoplados mostrado en la figura, con $k_1 = k_3$, y $m_2 = 2m_1$. (b) Calcular las frecuencias de los distintos modos de vibración de las masas. Suponga que las vibraciones son pequeñas y que el sistema oscila únicamente sobre el eje horizontal. (c) Calcular la relación de las amplitudes de oscilaciones de cada cuerpo para los diferentes modos. Discutir el caso simple para el cual todas las constantes de restitución, así como las masas sean iguales.

R. (a) La energía potencial elástica total del sistema es:

$$U = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1 x_2^2.$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema se obtienen minimizando la energía potencial:

$$F_{1(2)} = m_{1(2)}\frac{d^2x_{1(2)}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_{1(2)}}.$$

Desarrollando esta expresión, obtenemos el sistema acoplado:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0.$$

$$2m\frac{d^2x_2}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_2 - k_2x_1 = 0.$$

Las frecuencias de vibración se obtienen desde la aproximación armónica con el reemplazo $d^2x_j/dt^2 = -\omega^2x_j$, con:

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(k_1 + k_2) \pm \sqrt{k_1^2 + 2k_1k_2 + 9k_2^2}}{m}}.$$

(c) Las amplitudes de los modos se definen como:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2}{-m\omega^2 + k_1 + k_2}.$$

Como ejemplo particular, tomamos $k_1 = k_2$,

$$\omega_\pm = \frac{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para el signo (+) $\omega_+ = 1.54\sqrt{k/m}$, mientras que para el signo (-) $\omega_- = 0.79\sqrt{k/m}$. El sistema oscila con dos modos de vibración con una relación de amplitudes aproximadamente iguales a $A_1/A_2 = \ -2.73$ y $+0.73$ respectivamente. En el caso $m_2 = m_1 = m$ y $k_1 = k_2 = k_3 = k$, las frecuencias de oscilación de las vibraciones libres son:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

mientras la relación de amplitudes son respectivamente iguales a:

$$\frac{A_1}{A_2} = \mp 1.$$

1.120 *Una esfera de* 3 kg cae en el aire con una velocidad terminal de 25 m/s. (Suponer que la fuerza de rozamiento es $-bv$). Luego la esfera se acopla a un muelle con una constante elástica de 400 N/m y oscila con una amplitud inicial de 20 cm. (a) Calcular el valor de Q. (b) Cuándo la amplitud será de 10 cm? (c) Cuánta energía se habrá disipado cuando la amplitud es de 10 cm?

R. Si la esfera cae con velocidad terminal v_t, el coeficiente de rozamiento (que depende de la forma geométrica del objeto que cae) se puede calcular desde la relación:

$$b = \frac{mg}{v_t} = 1.176\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

(a) El factor de calidad es: $Q = m\omega_0/b = 29.46$, con $\omega_0 = \sqrt{K/m}$
(b) La amplitud de oscilación en el tiempo es $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$. El tiempo en que tarda en disminuir su amplitud de oscilación a la mitad es $t = (\ln 2)/\gamma = 3.54$ s.
(c) La energía disipada corresponde al 75% de la energía inicial. La energía inicial es $KA^2/2 = 8$ J, mientras que después de 3.54 s, la energía disipada es de 6 J.

1.121 *Cálculo del Factor Q*. Un oscilador amortiguado pierde el 2% de su energía en cada ciclo. (a) Cuál es su factor Q? (b) Si su frecuencia de resonancia es de 300 Hz, cuál es el ancho de banda $\Delta\omega$ cuando el oscilador está impulsado?

R. La energía de un oscilador amortiguado es: $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. En un ciclo, la energía del oscilador se reduce en un 2%, por lo tanto:

$$E(T) = 0.98E_0 = E_0 e^{-2\gamma T}.$$

$$0.98 = e^{-2\gamma T}.$$

$$2\gamma T = 0.0202.$$

Utilizamos la relación entre el factor de calidad y $2\gamma T$:

$$2\gamma T = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = 0.0202.$$

Despejando $Q = 311.5$. (b) El ancho de banda se aproxima a:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1884.96}{311.5} = 6.01\,\frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

1.122 *Resonancia en un sistema mecánico.* Una masa M está unida al extremo de un resorte sin masa con una constante de fuerza K y longitud no estirada l_0. El otro extremo del resorte puede girar libremente alrededor de un clavo incrustado en una superficie horizontal sin fricción. La masa gira en un círculo con frecuencia angular Ω. Calcular la longitud del resorte en función de la frecuencia de giro.
R. La fuerza centrípeta debe ser igual a la fuerza de restitución del resorte: $K(l - l_0) = M\Omega^2 l$.
De esta última relación:

$$l = \frac{l_0}{1 - \frac{M\Omega^2}{K}}\ .$$

El sistema exhibirá resonancia cuando la frecuencia de giro sea igual a la frecuencia natural de oscilación: $\Omega = \sqrt{K/M}$. En este caso, la longitud del resorte tiende a ser muy grande, y la ley de Hooke pierde validez.

1.123 *Vibración de una molécula con enlace covalente.* Muchas moléculas diatómicas están unidas por enlaces covalentes que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals. Ejemplos de ello son H_2, O_2 y N_2. Los experimentos indican que para tales moléculas la interacción puede describirse con una fuerza de la forma:

$$F = A\left(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right),$$

en donde A y b son constantes positivas, r es la separación de los centros de los átomos y R_0 es la separación de equilibrio. Calcular la constante de fuerza para oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio. Estimar un valor para $A = 4.5 \times 10^{-8}$ N, $b = 2.7 \times 10^{10}\text{m}^{-1}$, y $R_0 = 1.2 \times 10^{-10}$ m, asociados a la molécula de O_2.

R. La aproximación de pequeños desplazamientos alrededor del equilibrio $r - R_0 \approx x$ conduce a:

$$F \approx -Abx,$$

y la constante de fuerza es $K = Ab = 1215$ N/m.

1.124* *Modelo de un amortiguador de automóvil.* La suspensión de un automóvil puede aproximarse por el sistema simplificado muelle-amortiguador mostrado en la figura. a) Escribir la ecuación diferencial que define el movimiento absoluto de la masa M cuando el sistema se mueve a una velocidad constante v sobre una carretera de sección transversal senoidal como la indicada. b) Deducir una expresión para la amplitud del movimiento de *M.*

R. a) Sin pérdida de generalidad, la trayectoria del cuerpo puede escribirse como una función senoidal de la forma:

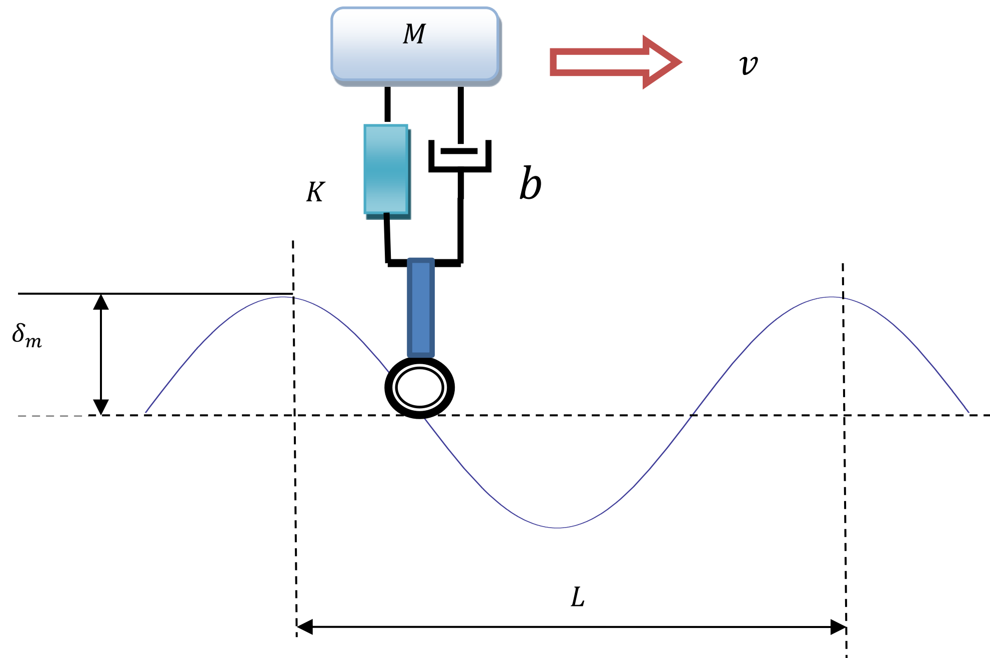
$$\eta(x) = \delta_m \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

Si el sistema se mueve a velocidad constante v en la carretera, entonces la posición instantánea del cuerpo está dada por:

$$\eta(t) = \delta_m \sin\left(\frac{2\pi v}{L} t\right).$$

La ecuación general para el movimiento amortiguado de un cuerpo sujeto a una fuerza exterior dependiente del tiempo es:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + Ky = F(t).$$



El cuerpo de masa M está sometido esencialmente a dos fuerzas externas: la fuerza de restitución del resorte y la fuerza de amortiguación. De este modo, una vez se conoce la posición del cuerpo en función del tiempo, es posible escribir explícitamente la función $F(t)$ como:

$$F(t) = K\eta(t) + b\frac{d\eta(t)}{dt},$$

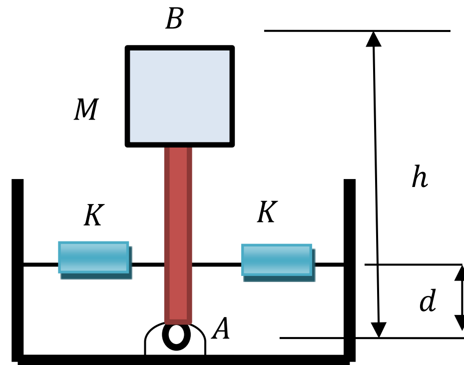
$$F(t) = K\delta_m \sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) + b\left(\frac{2\pi v}{L}\right)\delta_m \cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right).$$

b) La amplitud de movimiento viene dada según la fórmula: ($\omega = 2\pi v/L$)

$$y_m = \frac{F_0(\omega)}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \qquad F_0(\omega) = \sqrt{K^2 + (b\omega)^2}\delta_m.$$

En esta aproximación no se tienen en cuenta los efectos de la dimensión de la rueda, ni los efectos de rozamiento.

1.125 *La barra AB* está unida a una articulación en ***A*** y dos resortes, cada uno de constante K. Si $h = 600$ mm, $d = 250$ mm y $M = 25$ kg. Determínese el valor de K para el cual el periodo de oscilación es de a) 1 s, y b) infinito. Despreciar la masa de la barra y supóngase que cada resorte puede actuar tanto en tensión como en compresión.



R. Con respecto al pivote ***A*** existen dos momentos de torsión: uno debido a la fuerza de restitución de los resortes, y otro debido a la componente del peso del cuerpo. El torque neto en A es:

$$\tau = -2Kd^2\theta(\curvearrowright) + Mgh\theta(\curvearrowleft) = -constante \times \theta$$

La frecuencia de vibración del cuerpo de masa M se obtiene desde la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{constante}{I}},$$

en donde $I = Mh^2$ es el momento de Inercia con respecto al punto *A*. El periodo de oscilación toma la forma:

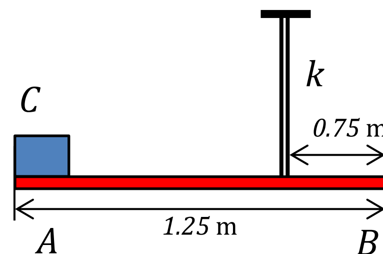
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{(2Kd^2 - Mgh)}}.$$

Con los valores suministrados, encontramos *K:*

a) Para $T = 1\ s,\ K = 4025.65$ N/m.
b) Si el periodo es infinito, el cual implica una condición de estabilidad vibracional,

$$K = \frac{Mgh}{2d^2} = 1176\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

1.126 *Una barra uniforme AB* de 3 kg está unida en la forma indicada a un resorte de constante elástica k = 900 N/m. Un bloque pequeño C de 0.5 kg es colocado sobre la barra en A. a) Si el extremo A se mueve entonces hacia abajo una distancia δ_0 y se libera, determine el periodo de vibración. b) Determine el valor máximo permitido de δ_0 para que el bloque C permanezca todo el tiempo en contacto con la barra.



R. a) La deformación inicial del resorte se obtiene desde la condición del equilibrio de los momentos con respecto al punto B

$$\Delta_0 = g\left(\frac{l}{l'}\right)\frac{(Mc + Mb/2)}{k},$$

en donde Mb es la masa de la barra. Al deformar el resorte una distancia adicional $l'\theta$, el sistema experimenta un torque resultante dado por:

$$\sum_i \tau^i = +lMcg - kl'(\Delta_0 + l'\theta) + \frac{l}{2}Mbg = I^B\alpha.$$

Reemplazando Δ_0, obtenemos:

$$-kl'^2\theta = I^B\alpha.$$

El momento de inercia del sistema es:

$$I^B = \left(\frac{1}{3}Mb + Mc\right)l^2.$$

La frecuencia de vibración es:

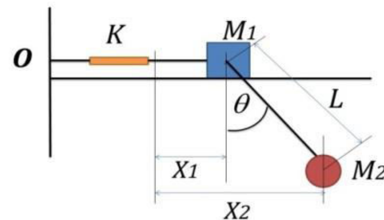
$$\omega = \sqrt{\frac{kl'^2}{I^B}} = 14.69\ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

El periodo se obtiene desde la frecuencia $T = 0.428$ s. b) El bloque C permanecerá en todo instante en contacto con la barra si la fuerza de restitución máxima que éste experimenta es menor que su peso:

$$-Mc\omega^2\delta_0 \leq Mcg, \qquad \delta_0 \leq 45.41\ \text{mm}.$$

Así, la máxima deformación que admite el sistema SIN que el bloque pierda el contacto es 45.41 mm.

1.127 *Péndulo Acoplado.* La figura ilustra una masa M_1 sobre un plano horizontal sin fricción conectada a un soporte O a través de un resorte de constante K. La masa M_2 está acoplada a M_1 por una cuerda de longitud L. (a) Obtener las ecuaciones de movimiento para M_1 y M_2. (b) Obtener las frecuencias de los modos normales para el caso $M_1 = M_2 = M$. (c) Cuáles son los modos normales para $M_1 = M_2 = M$ y $g/L >> K/M$?.



R. Para el bloque M_1, la ecuación de movimiento es:

$$M_1\frac{d^2X_1}{dt^2} = -KX_1 + T\sin\theta,$$

en donde T es la tensión del hilo y $\sin\theta \approx (X_2 - X_1)/L \approx \tan\theta$. La tensión se aproxima a $T = M_2 g/\cos\theta$, y el producto $T\sin\theta$ se reduce a $M_2 g(X_2 - X_1)/L$.

$$M_1\frac{d^2X_1}{dt^2} = -KX_1 + \frac{M_2 g(X_2 - X_1)}{L}.$$

Para el cuerpo M_2:

$$M_2\frac{d^2X_2}{dt^2} = -M_2 g\sin\theta = -\frac{M_2 g(X_2 - X_1)}{L}.$$

(b) Con la condición $d^2X_{1,2}/dt^2 = -\omega^2 X_{1,2}$, las frecuencias de oscilación aparecen como solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{K}{M_1} - \frac{M_2 g}{M_1 L} & \frac{M_2 g}{M_1 L} \\ \frac{g}{L} & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para un sistema de masas iguales, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{K}{M} - \frac{g}{L} & \frac{g}{L} \\ \frac{g}{L} & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las frecuencias de los modos de oscilación son:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{L}\right)^2 + \left(\frac{K}{2M}\right)^2}}.$$

(c) Bajo la condición $g/L \gg K/M$, las frecuencias de las vibraciones se aproximan a $\omega^- \approx 0$ y $\omega^+ \approx \sqrt{2g/L}$.

1.128 Movimiento Torsional. (a) Una esfera sólida de acero se cuelga en el extremo de un alambre de acero de 2 m de longitud y de radio 1 mm. La tensión crítica del acero antes de presentar ruptura es 1.1×10^9 N/m². Cuál es el radio y la masa de la esfera más grande que el alambre puede soportar? (b) Cuál es el periodo de la oscilación torsional de este sistema? El módulo de corte torsional del acero es 8×10^{10} N/m². El momento de inercia de la esfera alrededor del eje que pasa por su centro es $2MR^2/5$.

R. (a) El módulo de Young crítico se relaciona con el peso de la esfera igualando las cantidades:

$$Y_{ultimate} = \frac{Mg}{A} = \frac{Mg}{\pi r^2},$$

en donde A es el área de la sección transversal del alambre. Despejando M de esta expresión, obtenemos: $M = 352.63$ kg. El alambre resistirá una esfera de 352.63 kg antes de presentar fractura. El radio de la esfera es

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} = 22.1 \text{ cm},$$

con $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ como la densidad de masa del acero. (b) El momento de torsión τ para una barra sólida de longitud l y módulo de corte σ cuando se induce un desplazamiento angular θ es:

$$\tau = -\frac{\pi\sigma r^4}{2l}\theta = -\kappa\theta.$$

La inercia del sistema compuesto es la suma de las inercias de la barra y la esfera rotando alrededor de un eje común:

$$I_T = \frac{1}{2}M_{barra}r^2 + \frac{2}{5}M_{esfera}R^2.$$

La frecuencia de oscilación corresponde a la relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_T}} = \sqrt{\frac{\pi\sigma r^4}{2lI_T}} = 0.096 \ \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$

El periodo de oscilación del sistema es **65.7** segundos.

1.129 *Oscilaciones Forzadas.* Un cuerpo de masa M está sujeto a una fuerza resistiva del tipo $-bv$ pero SIN fuerza de restitución de tipo elástico. (a) Calcular su desplazamiento como función del tiempo, considerando que la velocidad inicial es v_0. (b) A $t = 0$ el cuerpo está en reposo. En este instante se le aplica una fuerza exterior $F = F_0 \cos(\omega t)$. Hallar los valores de A y δ en la solución en régimen estacionario:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta).$$

(c) Escribir la solución general [la suma de las partes (a) y (b)] para las condiciones $x = 0$ y $v = 0$ en el instante $t = 0$.

R. (a) Sin fuerza de restitución elástica, la ecuación de movimiento resultante se reduce a:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{M}\frac{dx(t)}{dt} = 0,$$

la cual puede re-escribirse como: ($\beta = b/M$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + \beta x\right) = 0.$$

La solución de la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} + \beta x = C = constante,$$

y su integración directa conduce a: $x(t) = C - De^{-\beta t}$. La condición de velocidad inicial define al constante de integración D: $D = v_0/\beta$. Finalmente:

$$x(t) = C - \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t}.$$

(b) En este caso, la ecuación de movimiento se modifica como:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t).$$

Reemplazando la solución de prueba, obtenemos dos ecuaciones simultáneas:

$$-\omega^2 A \sin\delta - \omega A\beta \cos\delta = 0$$

$$-\omega^2 A \cos\delta + \omega A\beta \sin\delta = \frac{F_0}{M},$$

cuyas soluciones para la fase y la amplitud son:

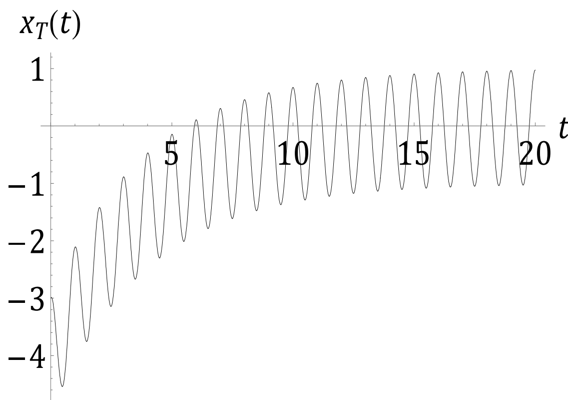
$$\tan\delta = -\frac{\beta}{\omega}, \qquad A = \frac{F_0}{M\omega\sqrt{\omega^2+\beta^2}}.$$

(c) La solución completa puede escribirse como:

$$x_T(t) = C - \frac{v_0}{\beta} e^{-\beta t} + A\cos(\omega t - \delta).$$

Aplicando las condiciones iniciales, $C = 0$, y

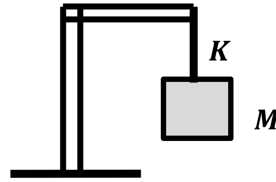
$$v_0 = \frac{\beta F_0}{M(\omega^2+\beta^2)}.$$



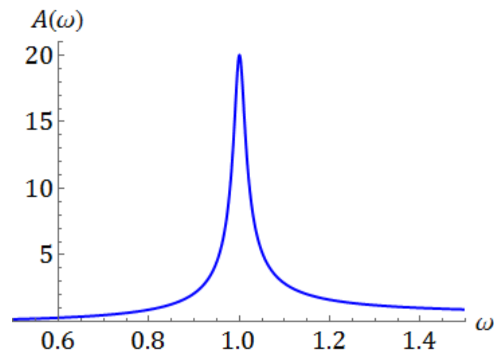
Gráfica de la posición instantánea en función del tiempo con los parámetros $f = 1$ Hz, $v_0 = 1$ m/s , $\beta = 0.25$ s-1. Se observa el comportamiento exponencial propio del régimen transitorio en los primeros 15 segundos bajo las condiciones iniciales del numeral (c). Después de ese intervalo de tiempo predomina la solución del régimen estacionario.

1.130 Sismógrafo. Considere un sismógrafo simple que consiste en una masa M que cuelga de un resorte en un marco de referencia rígido unido a la superficie terrestre, como se ilustra en la figura. La fuerza del resorte y el amortiguamiento dependen del desplazamiento y la velocidad relativa a la superficie terrestre, pero la aceleración dinámicamente significativa es la aceleración del cuerpo de masa M relativa a un punto fijo. Utilizando y para denotar el desplazamiento de M relativo a la superficie terrestre y η para denotar el desplazamiento de la superficie terrestre en sí misma, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = -\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$



(a) Obtener una expresión para y (estado estacionario) si $\eta = C\cos(\omega t)$.
(b) Bosquejar una gráfica de la amplitud A del desplazamiento y como función de la frecuencia ω, asumiendo que C es el mismo para todo ω.
(c) Un periodo típico de larga duración de un sismógrafo es de alrededor de 30 s y un factor de calidad del orden de 2. Como resultado de un violento terremoto la superficie terrestre puede oscilar con un periodo de 20 min y con una amplitud de tal forma que la máxima aceleración es de 10^{-9} m/s². Cuál debe ser el valor observable más pequeño de A si esto debe ser detectado?.



R. (a) la solución en estado estacionario es:

$$y(t) = \frac{C\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t + \phi),$$

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

(b) Con $\gamma = 0.025$, $\omega_0^2 = 1$, $C = 0.5$, el perfil de amplitud se ilustra en la figura adjunta (c) con los datos suministrados, la amplitud de oscilación del sismógrafo que debería ser detectable es del orden de 227 Angstroms.

1.131* *De acuerdo con la teoría clásica de la radiación electromagnética*, un electrón acelerado irradia energía a una razón de

$$\frac{Ke^2a^2}{c^3},$$

en donde $K = 6\times 10^9$ N-m² /C², e es la carga electrónica (Coulombs), a es la aceleración instantánea (m/s²), y c es la velocidad de la luz. (a) Si un electrón oscila a lo largo de una línea recta con frecuencia ν (Hz) y amplitud A, cuánta energía irradiará en un ciclo, asumiendo que el movimiento está descrito adecuadamente por $X(t) = A\sin(2\pi\nu t)$.? (b) Cuál es el factor de calidad Q del oscilador?. (c) Cuántos periodos de oscilación deberán transcurrir antes de que la energía se reduzca a la mitad del valor inicial? (d) Fijando un valor para ν en el rango óptico

(i.e. para luz visible), estimar el valor aproximado de Q y el tiempo de vida media del sistema radiante.

R. (a) La energía instantánea irradiada es: $a(t) = -4\pi^2\nu^2 A \sin(2\pi\nu t)$.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{16\pi^4 K e^2 A^2 \nu^4}{c^3}\sin^2(2\pi\nu t)\,;$$

En un ciclo, la energía electromagnética promedio irradiada se calcula como:

$$\bar{E} = \nu^{-1}\left(\overline{\frac{dE}{dt}}\right) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dE}{dt}\right)dt = \frac{8\pi^4 K e^2 A^2 \nu^3}{c^3}.$$

(b) El factor de calidad del sistema se obtiene desde la definición (a la frecuencia de resonancia):

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{Energía Almacenada en el oscilador}}{\text{Energía disipada por ciclo}},$$

conduciendo a la relación:

$$Q = 2\pi \times \frac{2\pi^2\nu^2 m A^2}{\frac{8\pi^4 K e^2 A^2 \nu^3}{c^3}} = \frac{mc^3}{2\pi K e^2 \nu}.$$

(c) La energía total del resonador se disipa según el número N de ciclos :

$$E_T = E_0 e^{-2\gamma N T},\;\; N = (Q\ln 2)/(2\pi),$$

con $\gamma T \sim \pi/Q$. (d) En el rango de la luz roja, $\nu = 4 \times 10^{14}$ Hz, el cual corresponde al valor mínimo de la frecuencia de la luz visible, $Q \sim 6.4 \times 10^7$. El tiempo de vida media es:

$$t_{1/2} \sim NT = \frac{N}{\nu} \sim 1.76 \times 10^{-8}\text{s}.$$

1.132* Oscilador Forzado Generalizado. Sobre un oscilador forzado sin amortiguamiento actúa la fuerza $F(t)$. Hallar la energía adquirida por el oscilador durante todo el tiempo de acción de esta fuerza, así como la amplitud de sus oscilaciones para $t \to +\infty$, si para $t \to -\infty$ el oscilador estaba en reposo.

R. La energía adquirida por el oscilador puede obtenerse integrando la potencia instantánea:

$$E(+\infty) - E(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)v(t)dt,$$

en donde $v(t)$ es la velocidad instantánea del oscilador. La ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{M}.$$

Si utilizamos una representación integral de Fourier de la forma:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,, \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

tendremos que la relación entre las imágenes $X(\omega)$ y $\bar{F}(\omega)$ es (reemplazando en la ecuación de movimiento):

$$X(\omega) = \frac{\bar{F}(\omega)}{M(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

Y la transformada inversa para $\bar{F}(\omega)$ se escribe como:

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t')e^{i\omega t'}dt'.$$

Reemplazando en la relación para $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t')e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}d\omega dt'.$$

La velocidad instantánea puede obtenerse derivando con respecto al tiempo la anterior expresión:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t')(-i\omega)e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}d\omega dt'.$$

Utilizando el resultado de la integral con respecto a la frecuencia:

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}d\omega = \pi e^{-i\omega_0(t-t')},$$

Obtenemos para $v(t)$

$$v(t) = \frac{1}{2M}\int_{-\infty}^{\infty} F(t')\,e^{-i\omega_0(t-t')}dt'.$$

Reemplazando en la fórmula para la energía total transmitida al oscilador, obtenemos:

$$E(+\infty) - E(-\infty) = \frac{1}{2M}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,e^{-i\omega_0 t}dt \times \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\,e^{i\omega_0 t'}dt' = \frac{1}{2M}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega_0 t}dt\right|^2.$$

Si se considera que la energía del oscilador $E(-\infty) = 0$ en el estado inicial en reposo, la posición de equilibrio del sistema, con $F(+\infty) = F_0$ tiende a:

$$x_{equilibrio} = \frac{F_0}{M\omega_0^2}.$$

1.133 *Hallar la energía adquirida* por un oscilador sometido a la acción de la fuerza:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 e^{\lambda t} & \text{para} \quad t < 0. \\ F_0(2 - e^{-\lambda t}) & \text{para} \quad t > 0. \end{cases}$$

La energía del oscilador es igual a E_0 cuando $t \to -\infty$.

R. Utilizamos el resultado del ejercicio anterior, integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega_0 t} dt = F_0 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda - i\omega_0)t}\, dt + 2\int_0^{\infty} e^{-i\omega_0 t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + i\omega_0)t}\, dt \right] = -\frac{2F_0 i\lambda^2}{\omega_0(\lambda^2 + \omega_0^2)}$$

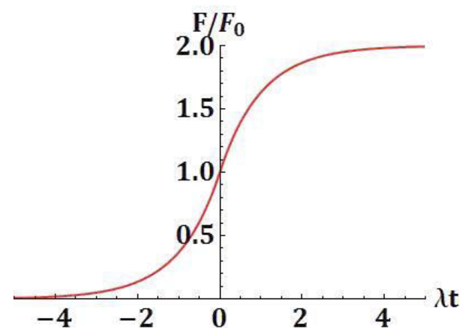
La energía adquirida por el oscilador depende de la razón a la cual se aplica la fuerza λ:

$$E(+\infty) = E_0 + \frac{2F_0^2\lambda^4}{M\omega_0^2(\lambda^2 + \omega_0^2)^2}.$$

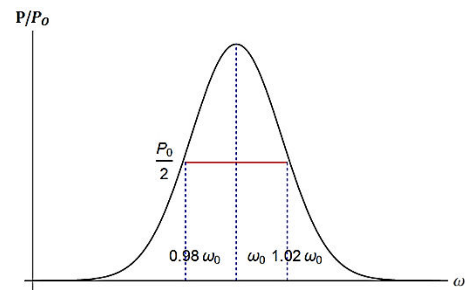
En el caso $\lambda \gg \omega_0$, la fuerza se aplica "instantáneamente" y la energía tiende a:

$$E(+\infty) = E_0 + \frac{2F_0^2}{M\omega_0^2},$$

El cual evidentemente corresponde al cambio de energía potencial elástica del oscilador bajo los efectos de una fuerza externa de magnitud $2F_0$.



1.134 En la figura (*Vibrations and Waves, A. French, The MIT Introductory Physics Series*) se ilustra la potencia media de entrada $\langle P \rangle$ como función de la frecuencia asociada a una fuerza exterior $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ sobre un cuerpo de masa M acoplado a un resorte con amortiguamiento. F_0 es una constante positiva. El factor Q es lo suficientemente grande de tal forma que la potencia media de entrada, la cual es máxima en ω_0, cae a la mitad de su valor para las frecuencias entre $0.98\omega_0$ y $1.02\omega_0$.



Cuál es el valor numérico de Q?. Si la fuerza exterior es removida del sistema, la energía decrece según la ecuación $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$. Cuál es el valor de γ?. Si la fuerza exterior es removida, cuál es el porcentaje de energía disipada por ciclo en el oscilador?.

R. El ancho de banda del sistema es: $\Delta\omega = 0.04\omega_0$ r/s. El factor de calidad se define como $Q = \omega_0/\Delta\omega = 25$. La constante de amortiguamiento es: $\gamma = \omega_0/2Q = 0.02\omega_0$. En un ciclo, la energía que remanente es: $E(T) = E_0 e^{-2\gamma T} \approx E_0 e^{-4\pi\gamma/\omega_0} \approx E_0 e^{-2\pi/Q} \approx E_0 e^{-2\pi/Q} \approx 0.78E_0$, mientras que la disipada es $0.22E_0$.

1.135 *Un objeto de* 2 kg de masa cuelga de un resorte de masa despreciable. El resorte se extiende 2.5 cm cuando el objeto es acoplado. El extremo del resorte oscila en dirección vertical con M.A.S. y amplitud de 1 mm. El factor de calidad del sistema es $Q = 15$. (a) Cuál es el ω_0 para este sistema? (b) Cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas en resonancia? (c) Cuál es la potencia promedio transmitida en resonancia?

R. (a) La ley de Hooke conduce directamente a: $Kd = Mg$, con d como la deformación del resorte.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{g}{d}} = 19.8\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}.$$

(b) Inicialmente se requiere obtener el valor de la magnitud de la fuerza máxima a la cual está sometido el sistema F_0. Si el sistema vibra con una amplitud A:

$$F_0 = Ma_{máx} = M\omega^2 A.$$

La frecuencia de vibración del sistema cuando la amplitud es 1 mm es desconocida. Ésta se puede obtener reemplazando la expresión para A:

$$F_0 = M\omega^2 A = M\omega^2 A(\omega) = \frac{M\omega^2 F_0}{M\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}.$$

La expresión anterior nos proporciona una ecuación para la frecuencia de vibración del sistema:

$$\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2}} = 1$$

cuya solución es:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2-1/Q^2}}.$$

Si el factor de calidad es suficientemente grande ($Q \gg 1$), entonces la aproximación $\omega \approx \omega_0/\sqrt{2}$ es válida. Numéricamente, $\omega = 14$ r/s. La fuerza máxima sobre el oscilador es:

$$F_0 = M\omega^2 A = 0.392\ \mathrm{N}.$$

La amplitud en resonancia puede calcularse utilizando:

$$A = \frac{QF_0}{M\omega_0^2} = 0.75\ \mathrm{cm}.$$

(c) y su potencia

$$\langle P\rangle = \frac{QF_0^2}{2M\omega_0} = \frac{1}{2}F_0 A\omega_0 = 0.0291\ \mathrm{W}.$$

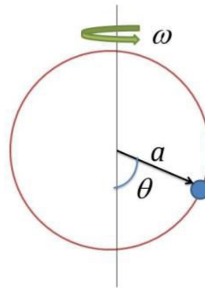
1.136 *Un sistema de péndulo forzado* de 20 g de masa y 1 m de longitud oscila con un periodo de 2.5 s y una amplitud de 26.17 cm. (a) Cuál es su factor de calidad Q? (b) Cuál es la máxima potencia transmitida al sistema? (c) Calcular el ancho de banda.

R. (a) $Q = \omega_0/2\gamma$. Para obtener el factor 2γ igualamos la amplitud del movimiento forzado con $F_0 = M\omega^2 A$. La ecuación resultante es:

$$A = \frac{M\omega^2 A}{M\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}},$$

con $\omega = 2\pi/T = 2.51$ r/s y $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 3.13$ r/s. Despejando $2\gamma = 2.088$ y el factor $Q = 1.5$. (b) $F_0 = 0.0331$ N y $\langle P \rangle = F_0 A\omega_0/2 = 13.55$ mW. (c) $\Delta\omega = 2\gamma = 2.088$ r/s.

1.137* Una canica de masa M se desliza sin fricción sobre un anillo circular de radio a. El anillo yace en un plano vertical y rota alrededor del diámetro vertical con una velocidad angular constante e igual a ω. (a) Para una velocidad angular ω mayor que cierta velocidad critica ω_C, la canica puede ejecutar pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio estable θ_0. Hallar θ_0 y ω_C (b) Hallar el periodo de las oscilaciones.



R. (a) La componente vertical de la fuerza de reacción normal (N) del anillo sobre la canica iguala el peso de ésta para una posición angular θ_0:

$$N\cos\theta_0 = Mg.$$

La componente horizontal es igual a la fuerza centrípeta que experimenta la canica en un radio de trayectoria $a\sin\theta_0$:

$$N\sin\theta_0 = M\omega^2 a\sin\theta_0\,; \quad N = M\omega^2 a\,.$$

El ángulo de equilibrio es:

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{g}{a\omega^2}\right).$$

De esta última expresión se extraer la frecuencia crítica de rotación desde la condición:

$$\frac{g}{a\omega^2} \leq 1; \quad \omega_C = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

(b) Para las pequeñas oscilaciones de la canica, la energía total del sistema es (con el eje positivo vertical hacia abajo):

$$E = K + U = \frac{1}{2}M\omega^2(a\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}Ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mga\cos\theta.$$

Alrededor de la posición de equilibrio, la energía total del sistema puede expandirse en función del ángulo pequeño φ como: $\theta \approx \theta_0 + \varphi$:

$$E(\varphi) \approx E_0 + \frac{1}{2}Ma^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Ma(a\omega^2 \cos\theta_0 - g)\sin\theta_0\,\varphi$$
$$+\frac{1}{2}M\left(\omega^2\cos(2\theta_0) - \frac{g}{a}\cos\theta_0\right)(a\varphi)^2 + \cdots +.$$

El término cuadrático refleja la forma de la fuerza de restitución a lo largo del anillo:

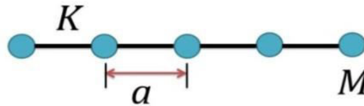
$$F = -M\Omega^2 a\varphi,$$

en donde

$$\Omega^2 = \frac{g}{a}\cos\theta_0 - \omega^2\cos(2\theta_0)$$

$$\Omega = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{g}{a\omega^2}\right)^2}.$$

1.138* Hallar las frecuencias de las vibraciones longitudinales de una cadena lineal infinitamente extendida compuesta de átomos idénticos. La posición de equilibrio corresponde a una distancia a entre átomos adyacentes. La masa de cada átomo es M y el coeficiente de acople entre los átomos vecinos es *K.*



R. Un átomo en una posición j experimentará una fuerza neta en función del desplazamiento u_j:

$$-\{[F(u_{j+1}) - F(u_j)] - [F(u_j) - F(u_{j-1})]\} = F_{neta}.$$

La ecuación general de movimiento es:

$$M\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 2F(u_j) - F(u_{j+1}) - F(u_{j-1}).$$

En el límite lineal, la fuerza es proporcional al desplazamiento:

$$F(u_j) = -Ku_j.$$

Planteamos una solución periódica del tipo (solución de Bloch):

$$u_j = u_0 \exp[i(kaj - \omega t)]\,;$$

en donde k es un parámetro característico de la red y tiene unidades de inverso de distancia. Con esta solución, es claro que:

$$u_{j\pm a} = u_j \exp(\pm ika).$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = -\omega^2 u_j.$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento, obtenemos:

$$-M\omega^2 = -K(2 - \exp(ika) - \exp(-ika)).$$

La frecuencia de oscilación del sistema es finalmente:

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{M}}\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|,$$

el cual corresponde a la frecuencia de los modos normales de la cadena, denominados comúnmente *fonones*. Para una cadena de N átomos, la condición de periodicidad se cumple si

$$u_{j\pm Na} = u_0 \exp[i(k(aj + Na) - \omega t)] = u_j \exp[ikNa] = u_j,$$

es decir, si

$$\exp[ikNa] = 1.$$

De esta última relación, puede obtenerse una expresión para el parámetro *k:*

$$kNa = 2\pi v; \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots . \pm (N-1)$$

$$k = \frac{2\pi v}{Na}.$$

La frecuencia de vibración, en términos de los posibles valores discretos del parámetro característico v, corresponde explícitamente a:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{4K}{M}}\left|\sin\left(\frac{\pi v}{N}\right)\right|.$$

1.139 Un bloque de masa M está conectado a un resorte cuyo extremo opuesto se mantiene fijo. El sistema está embebido en un mecanismo viscoso de atenuación. Las siguientes observaciones se han realizado:

> i) Si el bloque es empujado horizontalmente con una fuerza igual a Mg, la compresión estática del resorte es h.
>
> ii) La fuerza viscosa resistiva es igual a Mg si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida u.

En el caso $u = 3\sqrt{gh}$,

a) Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?
b) Cuál es el factor Q de este oscilador?
c) Si el oscilador se acopla a una fuente externa que ejerce una fuerza $F(t) = Mg\cos(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{2g/h}$, cuál es la amplitud de las oscilaciones en estado estacionario?.

R. a) Según las condiciones dadas:

$$b = \frac{Mg}{u}; \quad K = \frac{Mg}{h}.$$

La frecuencia de las oscilaciones amortiguadas:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2M}\right)^2} = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2} = g\sqrt{\frac{1}{gh} - \frac{1}{4u^2}}.$$

En el caso $u = 3\sqrt{gh}$;

$$\omega = \sqrt{\frac{35g}{36h}}.$$

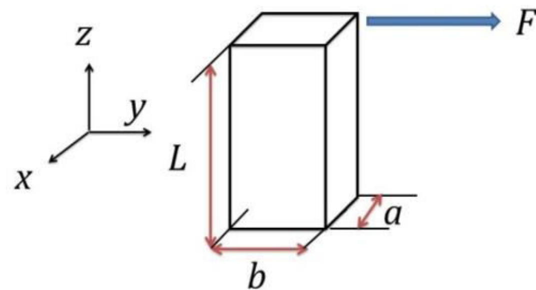
b) Factor Q :

$$Q = \frac{M\omega_0}{b} = \frac{u}{\sqrt{gh}} = 3.$$

c) La amplitud de las vibraciones forzadas es: ($\gamma = b/2M$)

$$A = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}} = \sqrt{\frac{9}{11}}h \approx 0.90h.$$

1.140 Una barra metálica de 0.5 m de longitud tiene una sección transversal rectangular de 2 mm². (a) Cuando a la barra se le acopla una masa de 60 kg de un extremo, ésta se extiende 0.25 mm. Cuál es el módulo de Young del material de la barra? (b) Si la barra es firmemente sujetada en la base y una fuerza F es aplicada en la dirección y en la parte superior de la misma (paralela al lado de longitud b), la deformación estática producida estará dada por:



$$y = \frac{4L^3}{Yab^3}F.$$

Si la fuerza F es removida y una masa M, el cual es mucho más grande que la masa de la barra es acoplada en la parte superior, cuál es la relación de las frecuencias de vibración en las direcciones y y x, i.e., las vibraciones paralelas a las longitudes b y a?.

R. (a) El módulo de Young se estima desde la fórmula: (W-peso acoplado)

$$Y = \frac{WL}{ab\delta} = 5.88 \times 10^{11} \ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

(b) La energía elástica almacenada en la deformación de la barra es:

$$U = \frac{Fy}{2}.$$

Esta energía se transfiere a la energía de movimiento del cuerpo de masa M a lo largo del eje y:

$$U = \frac{1}{2} M\omega_Y^2 y^2,$$

con una frecuencia de vibración asociada igual a:

$$\omega_Y = \sqrt{\frac{Yab^3}{4ML^3}}.$$

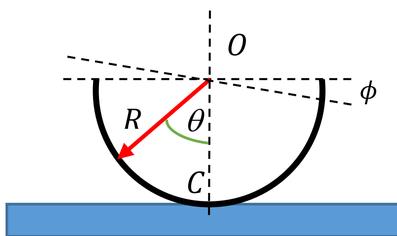
En un procedimiento similar, la frecuencia de vibración del cuerpo de masa M a lo largo del eje x es:

$$\omega_X = \sqrt{\frac{Yba^3}{4ML^3}}.$$

La relación ω_Y/ω_X se obtiene como:

$$\frac{\omega_Y}{\omega_X} = \frac{b}{a}.$$

1.141 Una pieza semicircular homogénea se mueve con M.A.S. sobre una superficie horizontal sin deslizarse. Determinar la frecuencia de oscilación para amplitudes pequeñas.



R. Si la densidad lineal de masa del semicírculo es λ (constante), el elemento de masa es $dM = \lambda R d\theta$ y la posición del C.M. se obtiene desde:

$$Z_{CM} = \frac{1}{M} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\theta \, \lambda d\theta = \frac{2R}{\pi}.$$

El momento de inercia con respecto a O es $I_O = MR^2$, y con respecto al centro de masa, utilizando el teorema de ejes paralelos:

$$I_{CM} = I_O - MZ_{CM}^2 = MR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

Tomando como referencia el ángulo de movimiento ϕ con respecto a la superficie de contacto C y en la aproximación de pequeños desplazamientos, obtenemos el máximo valor de la energía cinética rotacional:

$$T_{max} = \frac{1}{2}[I_{CM} + M(R - Z_{CM})^2]\dot{\phi}_{max}^2 = \frac{1}{2}[I_C]\dot{\phi}_{max}^2,$$

mientras que el valor de la energía potencial gravitacional con respecto a la superficie de contacto C:

$$U(\phi) = Mg(R - Z_{CM}\cos\phi) \approx Mg\left(R - Z_{CM}\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)\right) = U_{eq} + \frac{MgZ_{CM}\phi^2}{2},$$

en donde U_{eq} corresponde a la energía potencial gravitacional en equilibrio. El principio de conservación de la energía para el M.A.S. satisface la relación:

$$T_{max} + U_{min} = T_{min} + U_{max}$$

con $T_{min} = 0$ y $U_{min} = U_{eq}$. Por lo tanto:

$$T_{max} = U_{max} - U_{eq} = \frac{1}{2}MgZ_{CM}\phi_{max}^2$$

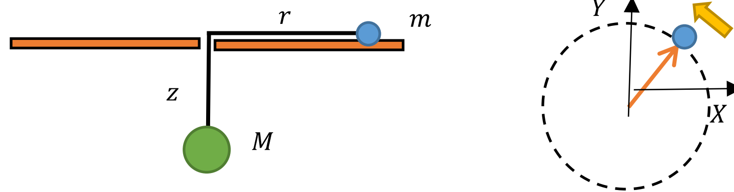
$$\frac{1}{2}[I_C]\dot{\phi}_{max}^2 = \frac{1}{2}MgZ_{CM}\phi_{max}^2;$$

Utilizando la definición $\dot{\phi}_{max} = \omega\phi_{max}$, finalmente se obtiene la frecuencia de vibración del cuerpo:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{(\pi - 2)}\frac{g}{R}} = 0.9359\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Esta técnica se basa en el principio de Rayleigh.

1.142* Una partícula de masa m yace sobre una mesa sin fricción está unida a una cuerda sin masa de longitud l, la cual pasa a través de un agujero en la mesa y está unida en el extremo a una segunda partícula colgante de masa $M > m$. Hallar la velocidad de la partícula de masa m de forma tal que el sistema permanezca en equilibrio. Si la velocidad de la partícula en la mesa aumenta espontáneamente en una cantidad δv, demostrar que el sistema presenta oscilaciones. Calcular la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones.



R. En equilibrio, la tensión de la cuerda debe ser igual a la fuerza centrípeta que experimenta el cuerpo sobre la mesa y es igual al peso del cuerpo colgante:

$$T = m\frac{v^2}{r_0} = Mg, \quad v(r_0) = \sqrt{\frac{Mgr_0}{m}}.$$

En el análisis de las pequeñas variaciones alrededor de la trayectoria en equilibrio, debemos calcular la aceleración en dirección radial del cuerpo de masa m. La componente radial de la aceleración de una partícula en un plano es:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,$$

en donde el punto denota la derivada temporal sobre la cantidad en la cual opera. En diagrama de fuerzas aplicado sobre el cuerpo en la mesa conduce a la ecuación:

$$-T = ma_r.$$

Sobre el cuerpo de masa *M:* (Estas ecuaciones deben ser consistentes con el movimiento instantáneo, i.e. si el cuerpo sobre la mesa se aleja del centro de la trayectoria, el cuerpo colgante se desplaza en dirección vertical ascendente.)

$$+T - Mg = +M\ddot{z}.$$

La ligadura $z + r = l$ conduce a la relación de las magnitudes $\ddot{z} = \ddot{r}$. Eliminando el parámetro T en estas expresiones, se obtiene:

$$-Mg = (M + m)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2.$$

Aplicando conservación del momentum angular L ($L = mr^2\dot{\theta} = const$), conduciendo a una ecuación sólo en términos de la coordenada radial en el plano:

$$-Mg = (M + m)\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}.$$

En la aproximación de las pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio r_0, consideramos que la posición radial cambia como $r \cong r_0 + \delta r$. Por lo tanto, $\ddot{r} \cong \delta\ddot{r}$ y $r^{-3} \cong r_0^{-3}(1 - 3\delta r/r_0)$. La ecuación anterior se simplifica como:

$$-Mg = (M + m)\delta\ddot{r} - \frac{L^2}{mr_0^3}(1 - 3\delta r/r_0).$$

Del primer desarrollo, es claro que:

$$\frac{L^2}{mr_0^3} = Mg.$$

Finalmente, obtenemos la ecuación del M.A.S para las pequeñas oscilaciones del sistema:

$$(M+m)\delta\ddot{r}+\frac{3Mg}{r_0}\delta r=0,$$

con una frecuencia angular de vibración igual a:

$$\omega=\sqrt{\frac{3Mg}{(M+m)r_0}}.$$

El cambio en la velocidad alrededor del punto de equilibrio conduce a un estimativo en la amplitud de las oscilaciones:

$$v(r_0)+\delta v=\sqrt{\frac{Mg(r_0+\delta r)}{m}},$$

con

$$\delta v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Mg}{mr_0}}\delta r, \qquad \delta r=2\sqrt{\frac{mr_0}{Mg}}\delta v.$$

Retomemos la ecuación:

$$-Mg=(M+m)\ddot{r}-\frac{L^2}{mr^3},$$

el cual debe resolverse exactamente para la posición instantánea r, de acuerdo a la teoría del campo central. Multiplicando por un factor integrante $\dot{r}$ se obtiene:

$$(M+m)\ddot{r}\dot{r}-\frac{L^2}{mr^3}\dot{r}+Mg\dot{r}=0,$$

el cual se integra fácilmente con el resultado:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{L^2}{2(m+M)r^2}+\mu gr=constante,$$

con $\mu=mM/(M+m)$, y cuya constante tiene unidades de energía. El primer término corresponde a la energía cinética de la partícula sobre la mesa, mientras que los restantes pueden ser tomados como la energía potencial efectiva del sistema, con

$$U^e(r)=\frac{L^2}{2(m+M)r^2}+\mu gr.$$

Esta función tiene un mínimo que coincide con:

$$\left(\frac{L^2}{Mmg}\right)^{1/3}=r_0.$$

La fuerza neta sobre la partícula es:

$$F = -\mu g + \frac{L^2}{(m+M)r^3}.$$

Alrededor de la posición de equilibrio, la fuerza tiene una respuesta lineal en el desplazamiento, condición típica del M.A.S:

$$F(r_0 + \delta r) \cong -\frac{3L^2}{(m+M)r_0^4}\delta r = -m\omega^2 \delta r,$$

con la frecuencia de oscilación dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{3Mg}{(M+m)r_0}}.$$

PR 1.8 Una bala de 9.72 kg que viaja horizontalmente colisiona elásticamente con un bloque de 10 kg. El bloque reposa sobre una superficie sin fricción y está acoplado a un resorte ideal. El otro extremo del resorte está fijo a una pared. Como resultado del impacto, el bloque ejecuta M.A.S con una frecuencia de 0.775 Hz y una amplitud de 7.50 cm. Cuál es la magnitud de la velocidad de la bala antes de entrar en el bloque?.

R. Denotemos como v_0 la velocidad de la bala *antes* de ingresar al bloque. Justo después de colisionar elásticamente con el bloque, el sistema adquiere una velocidad definida por el principio de conservación del momentum lineal:

$$v_X = \frac{m}{M+m}v_0,$$

con M como la masa del bloque y m la masa de la bala. El movimiento del sistema combinado es M.A.S, y la máxima velocidad en el movimiento corresponde precisamente al valor de v_X. De la fórmula:

$$v_X = \omega A = 2\pi f A,$$

es posible obtener v_0:

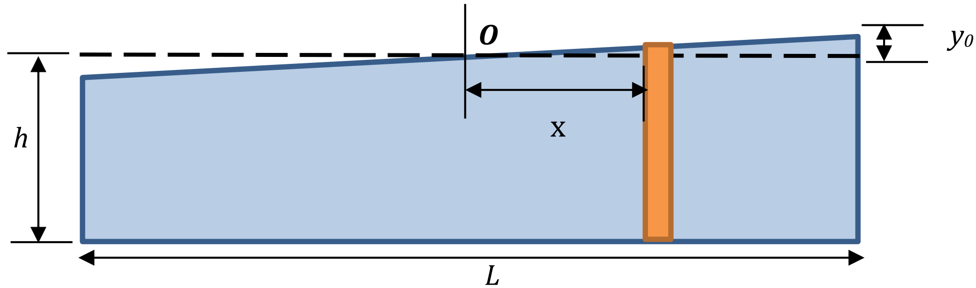
$$v_0 = \frac{2\pi f(M+m)A}{m} = 376 \text{ m/s}.$$

En este ejemplo se considera que el resorte no está deformado en el instante en que la bala entra al bloque.

1.143 ** Las oscilaciones tipo *Seiche* son oscilaciones temporales en la superficies de los cuerpos de agua [lagos o tanques], que son producidos especialmente por los cambios de presión atmosférica. Considere un lago con sección transversal *rectangular*, de longitud L y de profundidad h ($<< L$). Este problema recuerda la situación del péndulo simple, en el que la energía cinética es debida enteramente al flujo horizontal de agua, mientras que la energía potencial depende de un pequeño cambio del nivel vertical. (a) Demostrar que la energía potencial gravitacional del sistema de toda la masa de agua está dada por:

$$U = \frac{1}{6}\rho bgLy_0^2,$$

donde b es el ancho del lago. (b) Obtener el periodo de oscilación de este sistema en términos de L, h y g. El lago de Génova puede aproximarse como un tanque rectangular de unos 70 km de longitud y de unos 150 m de profundidad en promedio. El periodo de estas oscilaciones es de unos 73 min. Comparar este resultado con la fórmula obtenida en (a).



R. (a) La energía potencial gravitacional del centro de masa de una porción de masa de agua dM es:

$$dU = \frac{1}{2}dMgy(x) = \frac{1}{2}\rho bgy(x)^2 dx.$$

La distancia vertical está definida por $y(x) = h + 2y_0 x/L$. Integrando, obtenemos la energía potencial total:

$$U = \frac{1}{2}\rho bg\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y(x)^2 dx = U_0 + \frac{1}{6}\rho bgLy_0^2.$$

con $U_0 = \rho bgLh^2/2$. (b) Asumiendo que el flujo de agua es predominantemente horizontal, su velocidad v debe cambiar con x, con su máximo valor en $x = 0$, y cero en los extremos $\pm L/2$. En la aproximación del agua como líquido incompresible, es posible obtener una relación entre las diferencias de los flujos en las posiciones x y $x + dx$ con la razón de cambio de la altura de la superficie de agua en x: dy/dt.

$$vbh - (v + dv)bh \approx bdx\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{h}\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

En términos de la distancia horizontal:

$$v(x) - v(0) = -\int_0^x \frac{1}{h}\left(\frac{dy}{dt}\right)dx = -\int_0^x \frac{2x}{hL}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)dx = -\frac{x^2}{hL}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)$$

$$v(x) = v(0) - \frac{x^2}{hL}\left(\frac{dy_0}{dt}\right), \quad v(0) = \frac{L}{4h}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)$$

El factor $v(0)$ se obtiene imponiendo la condición de velocidad cero en los extremos. En cualquier instante dado, la energía cinética total asociada al movimiento horizontal del agua está definida por la integral

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dMv^2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho bhv(x)^2 dx = \frac{1}{2h^2L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho bh\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)^2\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 dx = \frac{\rho bL^3}{60h}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2.$$

En esta última línea se aproxima el valor del diferencial de masa dM por $dM = \rho bhdx$. La energía total es la suma de la energía potencial gravitacional y la energía cinética:

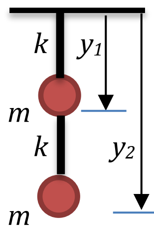
$$E - U_0 = \frac{\rho bL^3}{60h}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6}\rho bgLy_0^2 = \text{constante}$$

El periodo de oscilación asociado a esta funcional de energía es:

$$T = 2\pi L\sqrt{\frac{1}{10gh}}.$$

Con los datos suministrados para el lago de Génova, $T = 60.46$ min.

1.144 Dos masas iguales están conectadas con dos resortes idénticos sin masa, como se ilustra en la figura. Considerando únicamente el movimiento vertical, obtener la frecuencia de los modos normales de vibración y la relación de las amplitudes de oscilación de las masas en cada modo.



R. El efecto gravitacional sobre el sistema sólo afecta su posición de equilibrio. Tomando esta *nueva* posición como referencia, los desplazamientos verticales están definidos por las ecuaciones:

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = ky_1 - k(y_2 - y_1).$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -k(y_2 - y_1).$$

En la aproximación armónica, el sistema de ecuaciones resultante toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución para los modos normales corresponde a:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\omega_0,$$

con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La relación de amplitudes, en el orden de los signos para las frecuencias, son:

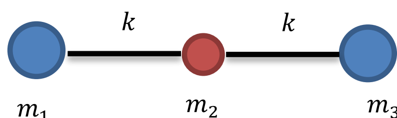
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para el signo (+), la relación de amplitudes es negativa, lo cual indica que los cuerpos oscilan con diferencia de fase de 180°. Para el signo de (-), la relación de amplitudes es positiva, los cuerpos oscilan en fase.

Una posible solución para el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio de los cuerpos puede escribirse según:

$\boldsymbol{\omega_+}$	$\boldsymbol{\omega_-}$
$y_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right)$	$y_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right)$
$y_2(t) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right)$	$y_2(t) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega_0 t\right)$

1.145 Una molécula de CO_2 puede asemejarse a un sistema de tres masas conectadas por dos resortes idénticos de constantes elásticas iguales a k. En este caso $m_1 = m_3$. (a) Escribir y las resolver las ecuaciones para los dos modos normales que surgen a lo largo de la línea que une los centros de las masas. (b) Con $m_1 = m_3 = M = 16$ unidades, y $m_2 = m = 12$ unidades, cuál debe ser la relación de frecuencias de los dos modos, asumiendo que este modelo clásico sea aplicable?.



R. (a) Las ecuaciones de movimiento son:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2),$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_3) - k(x_2 - x_1),$$

$$M\frac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2).$$

En la aproximación armónica: $d^2x_j/dt^2 = -\omega^2 x_j$. Los modos de vibración se obtienen desde la solución de la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} k - M\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

con:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}\left(1 + 2\frac{M}{m}\right)}.$$

(b) La relación de frecuencias:

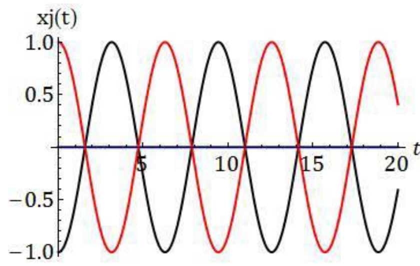
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\left(1 + 2\frac{M}{m}\right)} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.91.$$

El primer modo de vibración corresponde a un patrón en el cual el átomo del medio es estacionario mientras que los átomos de los extremos oscilan con la misma amplitud pero con una diferencia de fase de 180°. Las relaciones de las amplitudes en este caso son [Reemplazando $\omega = \omega_1$ en el sistema de ecuaciones anterior]:

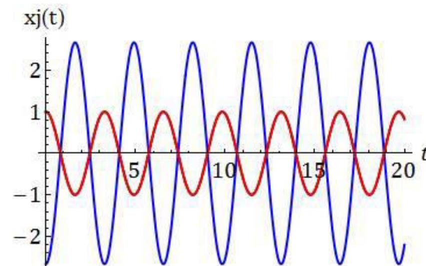
$$\frac{A_2}{A_1} = 0, \quad \frac{A_3}{A_1} = -1.$$

El segundo modo de vibración corresponde al caso en el cual los átomos de los extremos oscilan en fase y el átomo del medio oscila en oposición de fase con una amplitud mayor comparada con las amplitudes de oscilación de los átomos de los extremos. [Reemplazando $\omega = \omega_2$ en el sistema de ecuaciones anterior.]

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{8}{3} = -2.667; \quad \frac{A_3}{A_1} = 1.$$

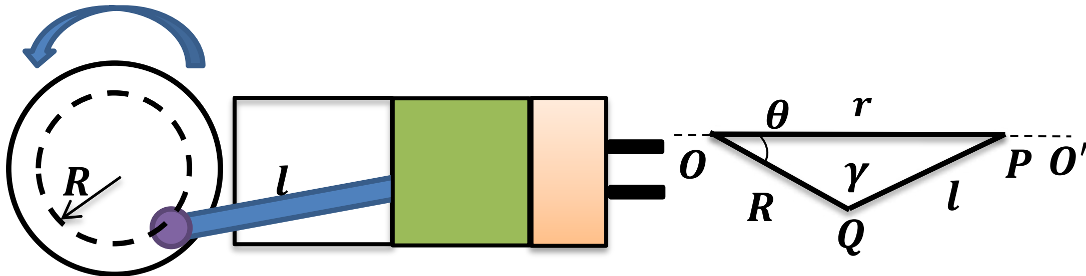


Primer modo de Vibración. El átomo central permanece en reposo y los átomos de los extremos oscilan en oposición de fase.



Segundo modo de vibración. El átomo central oscila con amplitud mayor y en oposición de fase comparados con los átomos de los extremos.

1.146 En la figura adjunta se ilustra la sección transversal de un modelo simple de un motor a gasolina. Cuando la rueda gira en sentido anti horario con velocidad angular ω, el pistón se mueve periódicamente. (a) Obtener una expresión para $x(t)$ desde la posición de equilibrio. (b) Construir un diagrama de la función $x(t)$ para diferentes valores de ω, l y R y compararlo con una gráfica de un sistema que oscile con M.A.S.



R. (a) En este mecanismo, el movimiento del pistón está restringido sobre el eje horizontal OO' en el segmento $\overline{OP}$. La posición de inicial puede considerarse en el punto $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. El segmento $\overline{OP}$ tiene una longitud

$$\overline{OP} = x(\theta) = R\cos\theta + l\sin\left(\gamma - \theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

La geometría del sistema satisface:

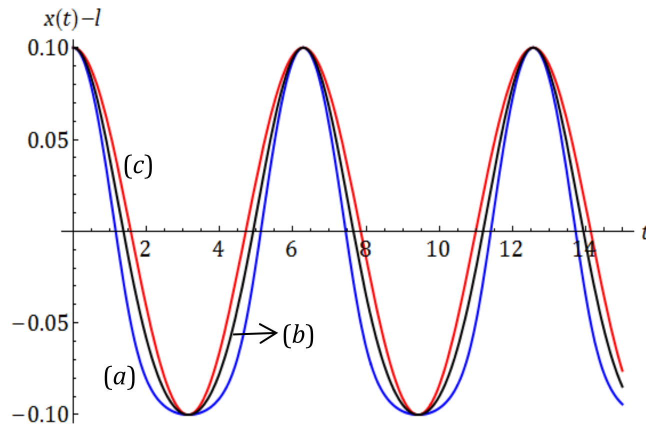
$$R\sin\theta = l\sin(\gamma - \theta).$$

Con $\theta = \omega t$, y combinando las dos expresiones anteriores, obtenemos:

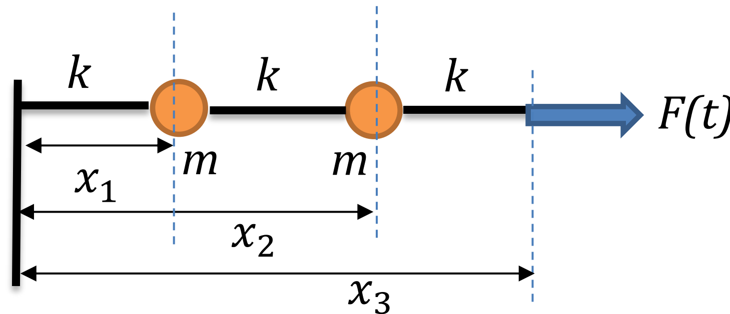
$$x(t) = R\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - R^2(\sin(\omega t))^2}.$$

El pistón oscila alrededor de una posición $x = l$ con respecto al punto $\boldsymbol{O}$.

(b) Gráficas de la posición relativa del pistón en función del tiempo con $l = 0.125$, ((a) línea azul, de mayor periodo aparente) y $l = 0.25$ ((b) línea negra, periodo intermedio); $\omega = 1$, y $R = 0.1$. La respuesta de un M.A.S con la misma amplitud y frecuencia se indica en la línea roja (c) (menor periodo aparente). El movimiento tiende a ser mas de tipo armónico simple cuando la longitud del acople l aumenta.



1.147 Dos masas iguales están conectadas a tres resortes idénticos (de constante k) sobre una superficie horizontal sin fricción. El sistema está fijo en un extremo, mientras que en el otro está acoplado a una fuerza externa que produce un desplazamiento $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$. Hallar los desplazamientos resultantes de las dos masas.



R. Sea a la longitud original de los resortes en las posiciones de equilibrio y δx_j los correspondientes desplazamientos desde las mismas. Las ecuaciones de movimiento para los cuerpos son [Ver ejemplo ***1.119***]:

$$-k(a + \delta x_1) + k(a + \delta x_2 - \delta x_1) = m\frac{d^2\delta x_1}{dt^2};$$

$$k(a + \delta x_3 - \delta x_2) - k(a + \delta x_2 - \delta x_1) = m\frac{d^2\delta x_2}{dt^2};$$

$$-2k\delta x_1 + k\delta x_2 = m\frac{d^2\delta x_1}{dt^2};$$

$$k\delta x_1 - 2k\delta x_2 + kX(t) = m\frac{d^2\delta x_2}{dt^2}.$$

Combinando estas dos expresiones, con $\omega_0^2 = k/m$.

$$\frac{d^4\delta x_1}{dt^4} + 4\omega_0^2\frac{d^2\delta x_1}{dt^2} + 3\omega_0^4\delta x_1 = \omega_0^4 X(t),$$

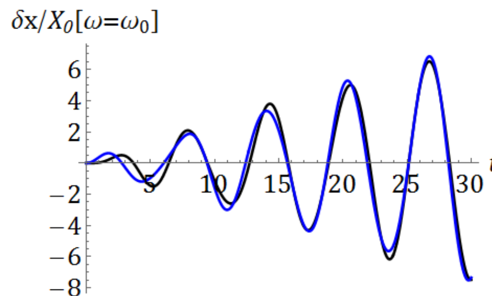
$$\frac{d^4\delta x_2}{dt^4} + 4\omega_0^2\frac{d^2\delta x_2}{dt^2} + 3\omega_0^4\delta x_2 = \omega_0^2(2\omega_0^2 - \omega^2)X(t).$$

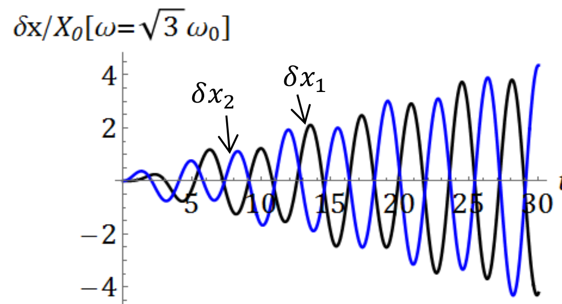
Las amplitudes de las oscilaciones de los cuerpos se definen resolviendo las ecuaciones anteriores desde la aproximación armónica:

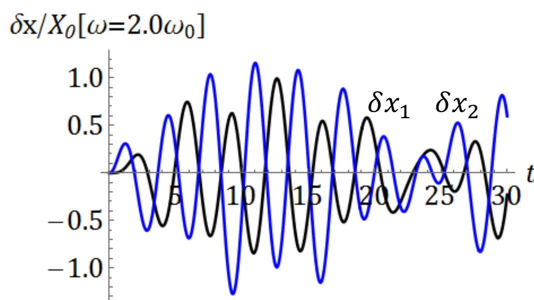
$$\delta x_{01} = \frac{\omega_0^4 X_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 3\omega_0^2)},$$

$$\delta x_{02} = \frac{\omega_0^2(2\omega_0^2 - \omega^2)X_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 3\omega_0^2)}.$$

El sistema entra en resonancia para las frecuencias $\omega = \omega_0$ y $\omega = \sqrt{3}\omega_0$. La relación de las amplitudes a las frecuencias de resonancia son $\delta x_{02}/\delta x_{01} = \pm 1$. En el límite de bajas frecuencias, las amplitudes de oscilación para cada cuerpo tienden a: $\delta x_{01} = X_0/3$, $\delta x_{02} = 2X_0/3$.







Perfil de las oscilaciones en función del tiempo para las frecuencias de resonancia y por fuera de resonancia. En todos los casos, la condición inicial se toma como $\delta x_1(0) = \delta x_2(0) = 0$ y $\omega_0 = 1.0$. Nótese el comportamiento de las oscilaciones en fase y en oposición de fase correspondientes a los modos de frecuencia $\omega = \omega_0$ y $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ respectivamente. (a) δx_1 [Línea Negra], (b) δx_2 [Línea de Color].

1.148 Las oscilaciones libres de un sistema mecánico exhiben una frecuencia angular ω_1. Cuando actúa una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, el ancho de banda asociado al valor de la mitad de la potencia máxima absorbida por el oscilador es $\Delta\omega = \omega_1/5$. (a) Cuál es el valor Q del oscilador?. (b) El sistema consiste en un acople de masa M y resorte de constante K. Cuál es el valor de la constante b en el término de la fuerza resistivo $F = -bv$.?

R. (a) Efectos de resonancia ocurren con $\omega \approx \omega_1$. El factor de calidad es $Q \approx \omega_1/\Delta\omega = 5$. (b) La constante se obtiene desde:

$$b = 2\gamma M = \Delta\omega M = \frac{\omega_1 M}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{K}{M}}M = 0.2\sqrt{KM}.$$

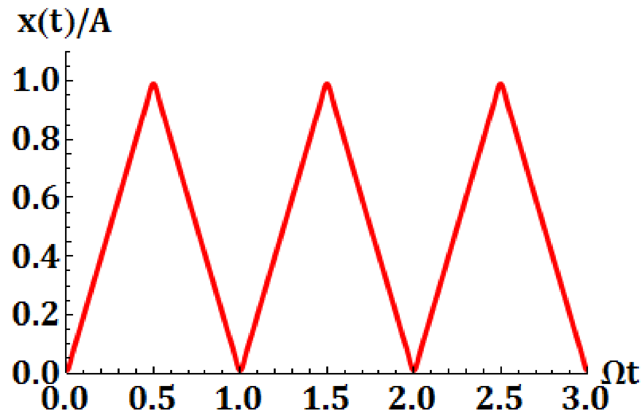
Nota. El rango de frecuencias en donde la potencia media alcanza un valor igual o mayor a la mitad del valor máximo está definido por:

$$\left\{-\gamma + \sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2} \leq \omega \leq \gamma + \sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2}\right\}.$$

El valor central de la frecuencia en este intervalo para la cual ocurre la máxima absorción de potencia se aproxima a:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2} = \omega_1\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} = 1.005\omega_1 \approx \omega_1.$$

1.149 ***Root Mean Square* [rms]. Una fuerza externa produce un desplazamiento periódico en un cuerpo de masa M y definido por una función de tipo triangular ilustrada en la gráfica.



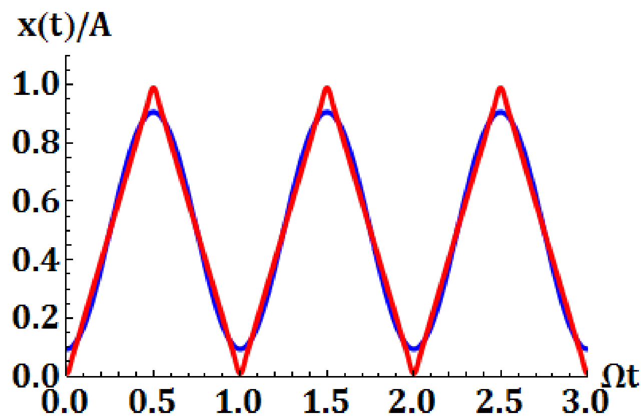
Obtener una expresión para el valor *rms* de la potencia asociada a la fuerza neta sobre el cuerpo. Despreciar los efectos de las fuerzas de fricción.

R. La expansión completa en series de Fourier de la función triangular es:

$$x(t) = A\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)\Omega t]\right).$$

La forma del pulso triangular puede aproximarse a la función armónica:

$$x(t) \cong A\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\Omega t)\right).$$



Aproximación armónica a la función de desplazamiento de tipo triangular, con $n = 0$.

La fuerza que experimenta el cuerpo se define a través de su aceleración instantánea:

$$F(t) \cong \frac{4MA\Omega^2}{\pi^2}\cos(\Omega t).$$

El valor *rms* de la potencia en un periodo es calculado desde la definición:

$$P_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [p(t)]^2 dt},$$

siendo $p(t) = F(t)v(t)$ la potencia instantánea transmitida al sistema, con $v(t) \cong (4A\Omega/\pi^2)\sin(\Omega t)$ como su velocidad. Integrando:

$$P_{rms} \cong \frac{8}{\sqrt{2}}\frac{MA^2\Omega^3}{\pi^4}.$$

1.150 Una variante al problema anterior consiste en incluir los efectos de la fuerza gravitacional sobre el bloque de masa *M.* Estimar (en kW) el valor *rms* de la potencia transmitida por la fuerza externa en un periodo, para el caso M = 50 kg, A = 0.5 m y en un periodo de 2 segundos.

R. La fuerza neta sobre el bloque es:

$$F(t) = M\big(g + a(t)\big).$$

Siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior:

$$P_{rms} \cong \frac{\sqrt{2}MA\Omega}{\pi^2}\sqrt{\left(\frac{4A\Omega^2}{\pi^2}\right)^2 + 4g^2}$$

Con los datos suministrados, $P_{rms} = 0.222$ kW.

1.151* Considere una extensión al ejemplo ***1.49.*** Si se cierra una rama del tubo en U de modo que la longitud de la columna de aire que queda encerrada es d, y se hace de nuevo oscilar el Mercurio. Suponiendo despreciable el rozamiento, que el aire es un gas perfecto y que los cambios de volumen son adiabáticos, calcular el nuevo periodo de oscilación.

R. La relación entre la presión y el volumen de un gas en un proceso adiabático es $pV^\gamma =$ constante, en donde γ es una constante positiva que relaciona las capacidades caloríficas del gas. El Mercurio experimentará una fuerza adicional debido a los cambios de presión en el brazo cerrado del tubo. Esta fuerza se puede estimar como $F' = \Delta pS$, con S como el área transversal. La relación entre el cambio de presión y el cambio de volumen del aire contenido en el brazo cerrado es $\Delta p = -\gamma p\Delta y/d$, en donde Δy es un pequeño desplazamiento desde la posición de equilibrio. Si el volumen disminuye la presión aumenta creando una fuerza que empuja el gas *hacia abajo* en dirección contraria al movimiento del fluido. Si el volumen aumenta, la presión disminuye por debajo de la presión de equilibrio, y se establece por lo tanto una fuerza que trata de llevar el líquido a su posición original. La componente de debido a los efectos de compresión y expansión adiabática es $F' = -\gamma pS\Delta y/d$. La presión p en esta fórmula corresponde a la presión barométrica de equilibrio: $p = \rho gh$, en donde h es la altura de la columna barométrica. Reemplazando: $F' = -\gamma\rho ghS\Delta y/d$. La fuerza total de restitución es: $F_T = F + F' = -2\rho gS\Delta y - \gamma\rho ghS\Delta y/d$. La nueva frecuencia de oscilación del Mercurio es:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S(2 + \gamma h/d)}{M}}.$$

La masa del líquido es $M = \rho S L$, siendo L la longitud total del mismo. El nuevo periodo toma la forma:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g\left(1 + \frac{\gamma h}{2d}\right)}}.$$

Con este método es posible obtener un estimativo de la constante adiabática del aire γ midiendo el periodo de oscilación del Mercurio y los parámetros correspondientes en equilibrio (Método de Rüchhardt, 1929).

1.7 Oscilaciones Eléctricas*

En un circuito Inductor-Capacitor (LC) acoplado y sin pérdidas óhmicas, se presenta un fenómeno de oscilación de la carga instantánea circulante en el sistema. Si la carga inicial en el condensador es Q_0 y la densidad de energía magnética en el inductor es cero, al conectar estos dos elementos existirá una variación negativa de la energía potencial electrostática almacenada en el condensador que debe ser igual al cambio positivo de la energía magnética en el inductor. Matemáticamente, expresamos estas dos energías como,

$$U_C(q) = \frac{q^2}{2C}, \qquad U_L = \frac{L}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2.$$

Calculando las variaciones, obtenemos:

$$-\frac{dU_C}{dt} = -\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}; \qquad \frac{dU_L}{dt} = L\frac{dq}{dt}\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right).$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos

$$\frac{dq}{dt}\left(L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}\right) = 0.$$

La ecuación para la oscilación de la carga toma la forma típica de un sistema M.A.S:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0;$$

cuya frecuencia es $\omega = 1/\sqrt{LC}$ y la solución correspondiente es $q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$. La energía total que se transfiere en el circuito es evidentemente $U_T = Q_0^2/2C$, mientras que la energía magnética máxima puede escribirse como $U_L = L\omega^2 Q_0^2/2$, y la corriente máxima que circula es ωQ_0. Los efectos de radiación electromagnética han sido ignorados. Es posible demostrar que $\sqrt{LC}$ tiene unidades de tiempo en segundos, si L se mide en Henrios (H) ($1\text{H} = 1\,\text{V.s}^2/$ Coulomb), y C en Faradios (F). ($1\text{F} = 1$ Coulomb/V).

$$\sqrt{LC} = \sqrt{1\text{ V.}\frac{\text{s}^2}{\text{Coulomb}} \times 1\ \frac{\text{Coulomb}}{\text{V}}} = \sqrt{s^2} = 1\ s.$$

Un elemento de carga oscilará con un periodo de 2π (s) en un circuito LC, con $L = 1$ H y $C = 1$ F.

Oscilador eléctrico con amortiguamiento: Circuito RLC Serie

Los efectos disipativos tienen lugar en este sistema cuando se introduce una resistencia R (Ω) conectada en serie con el inductor y el capacitor. En este caso, la ecuación para la dinámica de la carga eléctrica es:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

En esta última expresión se puede observar que la constante de amortiguamiento es:

$$\gamma = \frac{R}{2L},$$

y que la frecuencia de las oscilaciones naturales es $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. En la siguiente tabla comparamos los parámetros físicos del oscilador eléctrico y el oscilador mecánico:

Oscilador Mecánico	**Oscilador Eléctrico**
Masa (M) (kg)	Inductancia (L) (Henrios)
Constante elástica (K) (N/m)	Inverso de la capacitancia (1/C) (F^{-1})
Coeficiente de amortiguamiento b (kg/s)	Resistencia Eléctrica R (Ohm) (Ω)
Desplazamiento instantáneo $x(t)$ (m)	Carga instantánea q(t) (Coulombs) (C)

Oscilador Forzado

Al conectar en serie una fuente exterior de voltaje variable en el tiempo en forma armónica $V_0\cos(\omega t)$, la ecuación resultante para la dinámica de la carga es:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t),$$

en donde ω es la frecuencia de la fuente exterior. La potencia media absorbida por el circuito es:

$$\langle P \rangle = \frac{R\omega^2 V_0^2}{2[L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2\omega^2]},$$

cuyo valor a la frecuencia de resonancia es:

$$\langle P\rangle_{\omega=\omega_0}=\frac{V_0^2}{2R}.$$

(*) Material Opcional.

MOMENTOS DE INERCIA DE OBJETOS UNIFORMES			
Objeto	***Eje de Rotación***	***Geometría***	***Momento***
Disco Sólido	***Central***	R	$\frac{1}{2}MR^2$
Disco Sólido	***Borde***	R	$\frac{3}{2}MR^2$
Disco Hueco	***Central***	b a	$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$

Cilindro Hueco	***Central***		$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$
Cilindro Sólido	***Central***		$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro Sólido	***Superficie***		$\frac{3}{2}MR^2$
Capa Cilíndrica Hueca	***Central***		MR^2

Capa Cilíndrica Hueca	***Superficie***	R	$2MR^2$
Esfera Sólida	***Central***	R	$\frac{2}{5}MR^2$
Esfera Hueca	***Central***	R	$\frac{2}{3}MR^2$
Esfera Hueca	***Superficie***	R	$\frac{5}{3}MR^2$

Esfera Sólida	***Superficie***	R	$\frac{7}{5}MR^2$
Anillo	***Eje Central***	R	MR^2
Anillo	***Transversal por su diámetro***	R, w	$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
Placa Rectangular	***Transversal por el centro***	a, b	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
Placa Rectangular	***Por su centro, en el plano de la placa***	L	$\frac{1}{12}ML^2$

Barra Delgada	***Eje perpendicular a su centro***		$\frac{1}{12}ML^2$
Barra Delgada	***Uno de sus extremos***		$\frac{1}{3}ML^2$

2. ONDAS MECÁNICAS

2.1 Introducción

En esta sección realizaremos una primera aproximación al concepto de onda mecánica en una dimensión (1D). Una onda es usualmente considerada como una *perturbación* que puede propagarse en un medio a cierta velocidad, con transporte de energía y *momentum sin* transporte de masa. Una *perturbación* se considera como una variación del estado (de equilibrio) de un sistema físico debido a un agente exterior. Este cambio de estado puede producirse instantáneamente o de forma continua con cierta frecuencia o razón de cambio. El medio perturbado responde al agente exterior cambiando su configuración original o de equilibrio. El patrón de configuración resultante corresponde a una reorganización de las partículas que componen el medio. La descripción del patrón ondulatorio en un medio continuo puede darse través de las siguientes características fundamentales:

i) Longitud de onda λ: Distancia mínima entre dos puntos del patrón ondulatorio que se comportan idénticamente (metros).
ii) Frecuencia f: Razón en el tiempo en la cual la perturbación se repite (Hz).
iii) Velocidad de propagación $v = \lambda f$ (metros/segundo).

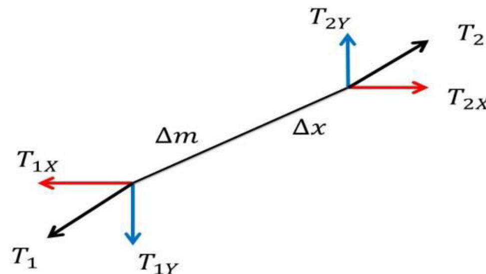
2.2 Dinámica del Movimiento Ondulatorio

Se describe la dinámica ondulatoria en tres casos particulares en diferentes medios:

i) Un hilo tenso uniforme.
ii) Una columna de gas en equilibrio térmico.
iii) Una barra uniforme con sección transversal uniforme.

i) Hilo tenso uniforme

Consideremos un segmento de hilo de longitud Δx, masa Δm cuyos extremos están sometidos a tensiones T_1 y T_2, como se ilustra en la figura. La componente vertical de las tensiones T_{1y} y T_{2y} poseen direcciones opuestas y pueden describirse según las proyecciones con respecto a los ángulos formados con respecto al eje horizontal θ_1 y θ_2:



$$T_{2y} = T_2 \sin \theta_2,$$

$$T_{1y} = T_1 \sin\theta_1.$$

La componente "neta" de la tensión que experimenta el segmento de cuerda sobre el eje vertical se aproxima para desviaciones pequeñas por:

$$T_y = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \approx T_2 \tan\theta_2 - T_1 \tan\theta_1.$$

La tangente de un ángulo evaluada en un punto corresponde a la pendiente de la curva en ese punto:

$$\tan\theta_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1,$$

$$T_y \approx T_2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - T_1 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1.$$

Consideramos dentro de esta aproximación que las tensiones en los puntos 1 y 2 permanecen constantes y uniformes en todos los puntos. Así, la tensión resultante en dirección vertical es proporcional al cambio de pendiente entre estos puntos:

$$T_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] \approx T\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Esta fuerza "vertical" debe igualarse, de acuerdo a la segunda Ley de Newton, a:

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y = T\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Si consideramos que el segmento de masa Δm posee densidad de masa μ, entonces:

$$\Delta m = \mu \Delta x.$$

La ecuación anterior se reduce a:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Aplicando el límite para Δx tendiendo a cero, el diferencial se aproxima a una derivada con respecto a la coordenada x:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

La forma generalizada de la ecuación de onda en una dimensión es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

desde la cual se deriva la relación para la velocidad de propagación de la onda en términos de la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa:

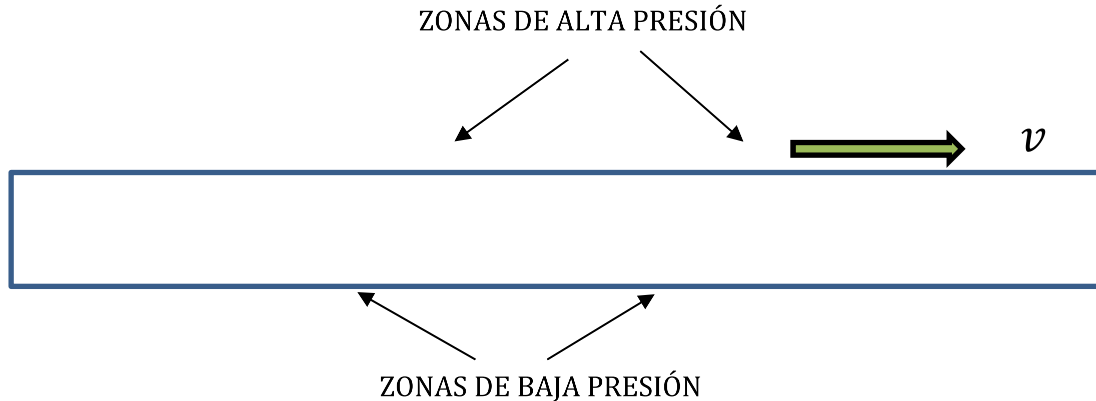
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

ii) Columna de Gas en Equilibrio Térmico

El modelo de la propagación de ondas en un recipiente "unidimensional" que contiene un gas en equilibrio termodinámico puede describirse partiendo desde la relación entre la presión y la densidad del mismo:

$$p = f(\rho),$$

en donde $f(\rho)$ es una función general que describe la dependencia con la densidad de masa del gas. Para el caso de un gas ideal a temperatura constante $f(\rho) \propto \rho$, mientras que para un gas en condiciones de equilibrio adiabático $f(\rho) \propto \rho^{\gamma}$, en donde γ es el coeficiente adiabático el cual depende de la relación de los calores específicos c_p y c_v: $\gamma = c_p/c_v$.



La propagación de las ondas produce fluctuaciones de alta y baja presión denominadas compresiones y rarefacciones, respectivamente. Estas zonas se forman en la dirección de propagación de la onda. El cambio de presión puede escribirse en una aproximación lineal como:

$$p \approx p_0 + \left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \cdots +$$

en donde p_0 y ρ_0 corresponden a la presión y la densidad del gas en equilibrio. La relación entre la densidad del gas y los desplazamientos de las capas moleculares en la posición x, $u(x,t)$ surge desde el principio de conservación de la masa:

$$\rho_0 S dx = \rho S(du + dx),$$

en donde S es la sección transversal del recipiente. En forma equivalente:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

para pequeñas deformaciones $\partial u/\partial x$. Combinando las expresiones anteriores,

$$p \approx p_0 - \rho_0 \left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

en donde $B = \rho_0 (\partial f(\rho)/\partial \rho)_{\rho_0}$es el módulo de compresibilidad volumétrico. El cambio de presión en una capa molecular produce una fuerza resultante:

$$S\Delta p = -\rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

En el límite $\Delta x \to 0$, obtenemos la ecuación de onda para el desplazamiento molecular $u(x,t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

con

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}}.$$

La velocidad de propagación de las ondas en un gas ideal a temperatura *T,* utilizando la ecuación de estado:

$$p = (\rho/M)RT,$$

conduce a:

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

en donde M es la masa molecular del gas ideal. Para un gas en condiciones adiabáticas a temperatura T es:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

La transferencia de *momentum* por unidad de longitud asociado al cambio de densidad local es:

$$g_X = -\rho_0 S \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nivel de Intensidad. Considere una onda longitudinal (de compresión) de longitud de onda λ que viaja con velocidad v en dirección $+X$ en un medio con densidad ρ. El desplazamiento molecular en el medio $u(x,t)$ se describe por: $u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t)$. La máxima variación de presión asociada la propagación de la onda se obtiene desde:

$$p(x,t) = p_0 - B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

El cambio de presión es, por lo tanto:

$$\Delta p = p(x,t) - p_0 = -B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -Bku_0\cos(kx - \omega t).$$

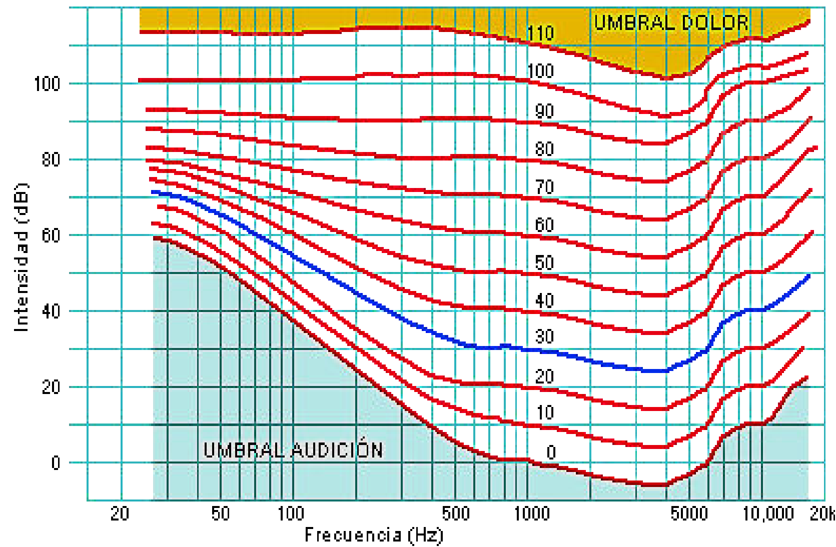
El máximo cambio de presión es entonces: $\Delta p_M = Bku_0 = 2\pi\lambda^{-1}\rho v^2 u_0$. La intensidad promedio, en términos del máximo cambio en la presión, se calcula como:

$$\langle I \rangle = \frac{(\Delta p_M)^2}{2\rho v} = 2\pi^2\lambda^{-2}\rho v^3 u_0^2.$$

La definición del nivel de intensidad en decibelios (dB) es

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{\langle I \rangle}{I_0}\right) \quad \text{(dB)}$$

en donde I_0 corresponde a la intensidad del umbral de audición promedio del oído humano: 10^{-12} W/m². Si el umbral del dolor se considera alrededor de 1 W/m², el nivel de intensidad tolerable por el oído humano antes de experimentar sensación de dolor es alrededor de 120 dB.



Nivel de intensidad (dB) como función de la frecuencia (Hz) (escala logarítmica). Se denotan las regiones del umbral de audición y del umbral del dolor.
http://www.anarkasis.net/pitagoras/730_sensibilidad_oido/Intensidad%20y%20frecuencia.gif

iii) Barra Homogénea. Considere un cilindro delgado homogéneo de sección transversal S y densidad volumétrica de masa ρ_0. La deformación de los segmentos de la barra, denotada por $\partial u(x,t)/\partial x$, es proporcional a la fuerza por unidad de área aplicada perpendicularmente:



En la región (1) la fuerza sobre la superficie está dada por:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

en donde E es el módulo de Young de la barra. En la región (2), en una posición $x + \Delta x$, la fuerza dentro de la aproximación lineal es: $F + (\partial F/\partial x)\Delta x$. La fuerza neta sobre el segmento Δx es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x = SE\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x.$$

Según la segunda ley de Newton, la dinámica de las deformaciones se define según la ecuación:

$$\rho_0 S\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

La ecuación de onda correspondiente es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}},$$

c definida como la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en una barra. Algunos valores pueden encontrarse en la siguiente tabla:

Material	***E* (x 10^{11}N/m²)**	**$\rho_0 \times 10^3$kg/m³**	***c* (m/s)**
Al	**0.70**	**2.70**	**5091.8**
Cu	**1.25**	**8.94**	**3739.3**
Fe	**2.06**	**7.87**	**5116.2**
Acero	**2.00**	**8.0**	**5000.0**

2.3 Energía Transmitida por una Onda Mecánica

Tomaremos el resultado del modelo anterior con el propósito de obtener una expresión para la energía transmitida en una onda mecánica, en términos de su velocidad de propagación y los parámetros característicos de frecuencia, longitud de onda y amplitud de vibración, entre otros. Una onda viajera armónica en dirección positiva de $+X$ puede construirse matemáticamente como:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t),$$

la cual es solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.$$

La densidad de energía cinética (energía por unidad de longitud) asociada a la onda se define por:

$$K = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\cos^2(kx - \omega t),$$

mientras que su valor promedio temporal es:

$$\bar{K} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2.$$

Análogamente, la densidad de energía potencial elástica se define como:

$$V = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu v^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 k^2 A^2\cos^2(kx - \omega t),$$

mientras que su valor promedio temporal es:

$$\bar{V} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2.$$

La densidad de energía mecánica promedio transmitida por la onda es:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \quad (\text{J/m})$$

El cálculo de la potencia promedio se obtiene desde el producto de la densidad de energía promedio y la velocidad de propagación de la onda:

$$\bar{P} = v\bar{E} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 v A^2 \ \ (\text{W})$$

2.4 Momentum Transmitido por una Onda Mecánica

Es posible obtener una expresión para la densidad del *momentum* examinando el movimiento longitudinal de la cuerda, especificado por la componente del desplazamiento que ocurre cuando existe una onda transversal. La componente horizontal puede aproximarse a:

$$T_{2x} - T_{1x} = T(\cos\theta_2 - \cos\theta_1).$$

Para pequeñas desviaciones del ángulo θ, tendremos:

$$-\frac{T}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) \approx -\frac{T}{2}(\theta_2 + \theta_1)(\theta_2 - \theta_1) \approx -T\theta\Delta\theta.$$

Bajo la aproximación $\theta \approx \partial y/\partial x$, la fuerza longitudinal que experimenta el segmento de longitud Δx es

$$-T\frac{\partial y}{\partial x}\Delta\frac{\partial y}{\partial x} = \mu\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

en donde ξ es el desplazamiento horizontal del segmento. La ecuación de movimiento longitudinal, en el límite de $\Delta x \to 0$, toma la forma:

$$-T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

el cual indica que el segmento de cuerda debe "estirarse" con el fin de reacomodar la distorsión resultante de la onda transversal. El *momentum* longitudinal adquirido por el segmento puede obtenerse integrando la fuerza resultante por unidad de longitud

$$G_x = \iint \mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dxdt = -\iint T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dxdt.$$

Integración por partes conduce a:

$$G_x = \int \mu\frac{\partial\xi}{\partial t}dx = \int g_x dx.$$

Nótese que

$$T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{T}{v^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Así:

$$-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

La cantidad

$$g_x = -\mu \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t},$$

puede interpretarse como la densidad del *momentum* localizado en la dirección X asociada a la con la onda transversal. Una relación con el flujo de energía P se obtiene comparando las expresiones anteriores a través de:

$$P = v^2 g_x.$$

Una ecuación que relaciona el flujo de energía y la densidad del *momentum* se mantiene en general para ondas que viajan en un medio lineal e isotrópico.

FÓRMULAS IMPORTANTES EN ONDAS MECÁNICAS

Ecuación de Onda 1D	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
Solución Armónica	$y = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$ $kv = \omega;\ \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Velocidad de Propagación medio Continuo (Fórmula Genérica)	$v = \sqrt{\frac{Prop.\,Elástica}{Prop.\,Inercial}}$
Velocidad de Propagación (Onda Sonora Longitudinal)	$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$ B − Módulo de Compresibilidad Volumétrico. ρ_0 − Densidad del gas en equilibrio.
Velocidad de Propagación (Onda Transversal, Cuerda Tensa)	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T − Tensión. μ − Densidad Lineal de Masa.
Velocidad de Propagación (Onda Longitudinal en una barra)	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ E- Módulo de Young. ρ_0- Densidad de Masa de la barra.

Velocidad de Propagación (Onda Transversal en una Barra)	$v = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$ G- Módulo de Corte. ρ_0- Densidad de Masa de la barra.
Velocidad de Propagación (Onda longitudinal en un Resorte Homogéneo)	$v = \sqrt{\frac{k}{M}L}$ k- Constante de restitución M- Masa del resorte. L – Longitud original (sin deformar).
Potencia Instantánea de una Onda en una Cuerda	$P = v\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$
Potencia Promedio Trasportada por una Onda en una Cuerda Tensa	$\bar{P} = v\bar{E} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 vA^2.$

2.5 Ondas Estacionarias en un Hilo Tenso

Un patrón de onda estacionaria se forma en un hilo tenso cuando dos o más ondas interfieren simultáneamente. La descripción más simple posible consiste en considerar dos ondas armónicas que viajan con la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero en direcciones opuestas. La onda resultante es la superposición de las ondas individuales:

$$y_r(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

Los valores máximos que pueden adquirir los segmentos del hilo son iguales a $\pm 2A$ (antinodos), mientras que los valores mínimos de los mismos son iguales a cero (nodos). En un hilo de longitud finita e igual a L, con extremos fijos, debe cumplirse la condición:

$$y_r(L,t) = 0,$$

el cual implica que para cualquier instante de tiempo t, el desplazamiento del segmento de hilo localizado en $x = L$ sea cero. Así:

$$\sin(kL) = 0,$$

y las soluciones para el vector de onda k están discretizadas en números enteros de π/L, i.e.:

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,3, \ldots,$$

El caso $n = 1$ corresponde al modo fundamental de vibración con frecuencia

$$f_1 = \frac{v}{2L},$$

mientras que los modos de vibración con $n > 1$ usualmente se denominan *armónicos.* Es fácil determinar la frecuencia de los armónicos de vibración en términos del modo fundamental a través de la relación:

$$f_n = nf_1 = n\frac{v}{2L}.$$

Los perfiles de las ondas estacionarias se aprecian en la siguiente figura:

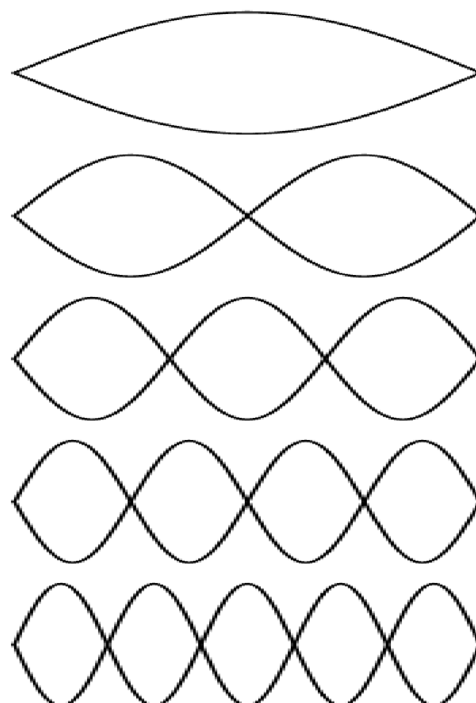
MODO FUNDAMENTAL $n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

$n = 5$



La distancia entre dos nodos o antinodos consecutivos es $\lambda/2$, mientras que la distancia entre un nodo y un antinodo consecutivo es $\lambda/4$, en cualquier caso.

Demos:
http://www.youtube.com/watch?v=iUNIoGvwvh0
http://www.youtube.com/watch?v=G11YlFH__kk&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=MCV1xrPNVzE&feature=related

2.6 Reflexión y Transmisión de ondas

Desarrollaremos esta sección utilizando como ejemplo (sin pérdida de generalidad) el estudio de la dinámica de una cuerda sometida a una tensión T que consiste en dos secciones con densidades lineales de masa μ_1 y μ_2, asociadas al segmento izquierdo y el derecho con respecto a un punto $x = 0$. Considere la posición $x = 0$ como el punto en donde se unen las cuerdas. Una onda armónica $y_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ parte desde el extremo izquierdo de la cuerda. Cuando ésta llega al punto de unión, parte de la onda se refleja y parte se transmite.

Si la ecuación de la onda reflejada es $y_r(x,t) = A_r \cos(k_1 x + \omega_1 t)$ y la ecuación de la onda transmitida $y_t(x,t) = A_t \cos(k_2 x - \omega_2 t)$, y $\omega_1 = \omega_2$.

(a) Demuestre que la relación entre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida son:

$$A_t = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} A_i, \qquad A_t = \frac{2k_1}{k_2 + k_1} A_i.$$

(b) Demuestre que si $\mu_2 \to \infty$, (en este caso se considera μ_2 como una frontera rígida) $A_t = 0$, $A_r = -A_i$. (c) Escribir una expresión para la onda resultante en el lado izquierdo de la frontera.

R. (a) En $x = 0$, los desplazamientos en el segmento izquierdo y derecho son iguales, i.e.: $y_i + y_r = y_t$

$$A_i + A_r = A_t; \qquad (1)$$

dado que la frecuencia de vibración de los elementos en la cuerda es la misma $\omega_1 = \omega_2$. Aplicamos la condición de continuidad en la derivada a ambos lados de la unión:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+}.$$

En el lado izquierdo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{0^-} = \left(-k_1 A_i \sin(k_1 x - \omega t) - k_1 A_r \sin(k_1 x + \omega t)\right)_{0^-}$$

Mientras que en el lado derecho:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{0^+} = \left(-k_2 A_t \sin(k_2 x - \omega t)\right)_{0^+}$$

Evaluando en cero e igualando, tendremos:

$$-k_1 A_i \sin(-\omega t) - k_1 A_r \sin(\omega t) = -k_2 A_t \sin(-\omega t).$$

Teniendo en cuenta que la función $\sin(\omega t)$ es una función impar, entonces:

$$k_1 A_i - k_1 A_r = k_2 A_t. \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente para A_r y A_t en términos de A_i desde las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$k_1 A_i - k_1 A_r = k_2 (A_r + A_i); \quad \text{ó} \quad A_t = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} A_i.$$

Reemplazando para A_t, se obtiene:

$$A_t = \frac{2k_1}{k_2 + k_1} A_i,$$

el cual completa la demostración.

(a) Si $\mu_2 \to \infty$, la velocidad de la onda en el segmento de la derecha es cero, y $k_2 = \omega/v_2 \to \infty$. El número de onda en el segmento 2 es mucho mayor que el número de onda en el segmento 1, y la amplitud de la onda transmitida es cero ($A_t = 0$), mientras que la amplitud de la onda reflejada es $A_r = -A_i$.
(b) La onda resultante en este caso es:

$$y(x,t) = A_i\cos(k_1x - \omega t) - A_i\cos(k_1x + \omega t) = 2A_i\sin(k_1x)\sin(\omega t),$$

el cual corresponde al patrón de una onda estacionaria con uno de sus extremos fijos localizado en $x = 0$.

EJEMPLOS: ONDAS MECÁNICAS Y SONORAS

2.1 *Una cuerda* de $L = 2$ m de longitud y $m = 4$ g de masa se mantiene horizontalmente con un extremo fijo y el otro soportando una masa de $M = 2$ kg. Hallar la velocidad de las ondas transversales de la cuerda.
R. Utilizamos

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\frac{MgL}{m}} = 98.99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

PR 2.1. *Dada la ecuación de onda* $y(x,t) = 2\sin\big(2\pi(0.1x - 5t)\big)$, en unidades S.I., determinar (a) La longitud de onda, (b) la frecuencia, (c) el periodo, (d) La velocidad de propagación (e) la amplitud, (f) La dirección de propagación, (g) Escribir una expresión para una onda que sea idéntica pero que se propague en sentido opuesto.

R. (a) $\lambda = 10$ m, (b) $f = 5$ r/s, (c) $T = 0.2$ s, (d) $v = \lambda f = 50$ m/s, (e) $A = 2$ m, (f) Sentido Positivo del eje X, (g) $y(x,t) = 2\sin[2\pi(0.1x + 5t)]$.

PR 2.2. Una cuerda de acero de un piano tiene 0.7 m de longitud y una masa de 5 g. Se tensa mediante una fuerza de 500 N. (a) Cuál es la velocidad de las ondas transversales del hilo? (b) Si se requiere disminuir la velocidad de la onda en un factor 2 sin modificar la tensión, qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

R. (a) La velocidad de la onda transversal generada es:

$$v = \sqrt{\frac{TL}{m}} = \sqrt{\frac{500 \times 0.7}{0.005}} = 264.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(b) Si se requiere disminuir la velocidad a la mitad sin cambiar la tensión, entonces la masa del hilo compuesto debe aumentar en un factor de 4. La nueva masa compuesta es de 20 g. Por lo tanto deben agregarse unos 15 g de cobre alrededor del hilo de acero.

2.2 *Los extremos de una cuerda* de 2.4 m de longitud y 0.19 kg de masa se fijan de modo que se mantiene estirada con una tensión de 122 N. Cuál es la frecuencia de una onda estacionaria con tres antinodos?

R. Con tres antinodos, la longitud total de la cuerda es igual a:

$$L = \frac{3}{2}\lambda.$$

$\lambda = 1.6$ m. La frecuencia de este modo de vibración es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{\lambda} \times \sqrt{\frac{TL}{M}} = \mathbf{24.54\ Hz}$$

2.3 *Un alambre acoplado* a un vibrador de 120 Hz exhibe ondas transversales de 31 cm de longitud de onda a lo largo de él. (a) Cuál es la velocidad de las ondas en el alambre? (b) Si la tensión en la cuerda es 1.2 N, cuál es la masa de 50 cm de alambre?

R. (a) La velocidad de propagación de las ondas es:

$$v = \lambda f = 0.31 \times 120 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 37.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

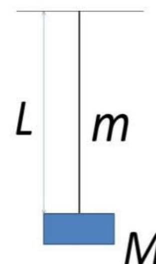
(b) La densidad de masa de la cuerda se relaciona con la tensión y la velocidad de propagación de la onda como:

$$\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{1.2}{(37.2)^2} = 8.67 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

En 50 cm de cuerda, la masa de la misma es:

$$M = \mu L = 8.67 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \times 0.5 \text{ m} = 4.33 \times 10^{-4} \text{ kg}.$$

2.4 *Onda en un sistema con tensión variable.* Un cuerpo de masa M se suspende verticalmente de una cuerda de masa m, longitud L y densidad lineal de masa μ. Demuestre que un pulso transversal recorrerá la longitud de la cuerda en un tiempo



$$t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m}-\sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right).$$

R. La tensión en la cuerda cambia punto a punto según la fórmula:

$$T(y) = Mg + mg\left(1-\frac{y}{L}\right),$$

tomando $y = 0$ como el extremo superior. La velocidad de propagación del pulso puede definirse como:

$$v(y) = \sqrt{\frac{T(y)}{\mu}} = \frac{dy}{dt}.$$

Resolviendo:

$$\int_0^t dt = \sqrt{\mu}\int_0^L \frac{dy}{\sqrt{T(y)}} = t = \frac{2}{\sqrt{g\mu}}\left(\sqrt{M+m}-\sqrt{M}\right),$$

el cual corresponde a la definición en el enunciado, con $\mu = m/L$. Para $M = 0$ (sin carga aplicada) el tiempo que requiere un pulso para viajar desde un extremo al otro es:

$$t^* = 2\sqrt{\frac{L}{g}},$$

el cual no depende de la densidad de masa μ.

2.5 *Una onda transversal* que se desplaza en una cuerda se representa por $y(x,t) = 0.42\sin(7.6x + 94t)$, en donde y, x están en metros y t en segundos. Determine para esta onda: (a) la longitud de onda, (b) la frecuencia, (c) la velocidad, (d) amplitud, (e) la rapidez máxima y mínima de las partículas de la cuerda, (f) la tensión aplicada si $\mu = 3.3\times10^{-4}$ kg/m. (g) Estimar la potencia promedio transmitida por esta onda.

R. (a) $\lambda = 2\pi/k = 0.83$ m. (b) $f = \omega/2\pi = 14.96$ Hz. (c) $v = \omega/k = 94/7.6 = 12.37\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (d) $A = 0.42$ m . (e) $v_{máx} = \omega A = 39.5$ m/s, $v_{min} = 0$. (f) $T = \mu v^2 = 0.05$ N. (g) $\bar{P} = \mu\omega^2 v A^2/2 = 3.18$ W.

2.6 *Onda Transversal.* Dos puntos sobre una cuerda son observados como ondas viajeras que pasan a través de ellos. Los puntos están localizados en las posiciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ m. Los movimientos transversales de los dos puntos están descritos por las ecuaciones:

$$y_1 = 0.2\sin(3\pi t),$$

$$y_2 = 0.2\sin(3\pi t + \pi/8).$$

(a) Cuál es la frecuencia en Hz?
(b) Cuál es la longitud de onda?
(c) Cuál es la velocidad de propagación de la onda?

R. (a) La frecuencia es 1.5 Hz. (b) La longitud de onda se obtiene desde la diferencia de fase asociada a los dos movimientos: $\Delta\phi = \pi/8$. Esta diferencia de fase se debe a la diferencia de recorrido de las ondas entre dos puntos:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r.$$

La longitud de onda es $\lambda = 16$ m. (c) $v = \lambda f = 24$ m/s. La diferencia de fase entre estos dos puntos es:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \Delta\phi = 2n\pi \pm \frac{\pi}{8}.$$

Las soluciones físicamente posibles para las longitudes de onda son:

$$\lambda = \frac{16}{16n - 1}, \qquad n = 1,2,3 \dots$$

para una onda viajando hacia la derecha "positivamente", mientras que si la onda se propaga "negativamente":

$$\lambda = \frac{16}{16n + 1}, \qquad n = 0,1,2,3 \dots$$

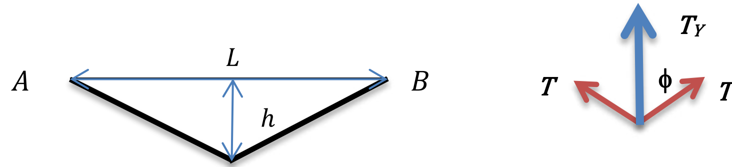
Las velocidades posibles de la onda son: $v = -24$ m/s, $+8/5$ m/s..etc.

2.7 *Un tablón se coloca sobre un pozo* de 5 m de ancho. Una estudiante se sitúa en la mitad del tablón y comienza a saltar verticalmente de modo que salta dos veces por segundo. El tablón oscila con una amplitud que es máxima en su centro. (a) Qué rapidez tienen las ondas transversales en el tablón?. (b) Con que ritmo deberá saltar la estudiante para producir oscilaciones de amplitud grande si está parada a 1.25 m del borde del pozo?. Las ondas estacionarias formadas tienen nodos en los dos extremos que descansan en el suelo a cada lado del pozo.
R. (a) La frecuencia de oscilación inducida al tablón es 2 Hz. Si la amplitud es máxima en su centro, el modo fundamental y la frecuencia están relacionados por:

$$f_1 = \frac{v}{2L}.$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales formadas es: $v = 2f_1L = 20$ m/s. (b) En una posición localizada a 1.25 m ($L/4$) de uno de sus extremos deberá formarse un antinodo, que corresponde a una frecuencia mínima de vibración igual a $2f_1$, (dos antinodos localizados a 1.25 m a cada lado del borde del pozo, y un nodo en el centro). La estudiante deberá saltar a razón de 4 veces por segundo (4 Hz).

2.8 *Una cuerda de longitud L,* la cual está fija en sus extremos y tiene una tensión T, se separa una distancia h desde su centro y luego es liberada. (a) Cuál es la energía de las oscilaciones subsecuentes? (b) Qué tan frecuente reaparecerá la forma ilustrada en la figura?



R. (a) Asumiendo que la tensión permanece constante e igual a T, el trabajo realizado para deformar la cuerda desde su posición inicial es:

$$W = -\int_0^h \boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\int_0^h T\cos\phi\, dy = 2T\int_0^h \frac{ydy}{\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = T\left(\sqrt{L^2+4h^2}-L\right),$$

El cual puede aproximarse a $W\sim 2Th^2/L$, para valores pequeños de h. El trabajo realizado sobre el sistema es igual a la energía potencial elástica total que adquiere el mismo.
(b) En el modo fundamental vibración, se cumple para el número de onda:

$$k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi f}{v}.$$

Considerando $v = \sqrt{TL/M}$, el inverso de la frecuencia de oscilación corresponde al periodo de la onda:

$$\frac{1}{f} = P = \frac{2L}{v} = 2\sqrt{\frac{ML}{T}}.$$

2.9 *Onda Estacionaria I.* Una onda estacionaria puede describirse a través de la expresión $Y(x,t) = 4.8\times 10^{-3}\sin(x/3.6)\cos(130t)$ (x, Y y t en metros, t en segundos). Determine la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de las ondas viajeras que se combinan para formar esta onda estacionaria.
R. El perfil de la onda estacionaria surge de la combinación de las ondas incidente (propagándose en dirección +X) y reflejada (dirección −X):

$$Y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)\,.$$

La amplitud es $2A = 4.8\times 10^{-3}$m; $A = 2.4\times 10^{-3}$m. Longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, $\lambda = 22.61$ m. Velocidad de las ondas viajeras: $v = \omega/k = 468$ m/s.

2.10 *Ondas en un tubo.* Un diapasón resuena con la columna de aire de una botella de refresco, cuando el nivel del líquido en la botella es tal que deja una columna de aire de 50 mm

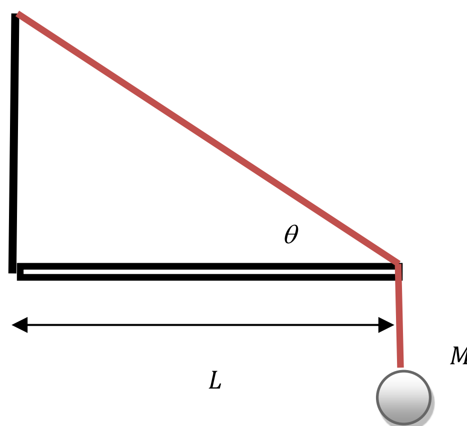
de longitud, y se escucha de nuevo cuando la columna es de 70 mm. Cuál es la frecuencia de vibración del diapasón?. Tomar la velocidad del sonido como 348 m/s.

R. Las longitudes del tubo asociadas a las resonancias son:

$$\frac{v}{4f}, \frac{3v}{4f}, \frac{5v}{4f} \dots$$

Entre dos longitudes consecutivas cualesquiera tenemos: $\Delta L = v/2f$.
La frecuencia del diapasón es: $f = v/2\Delta L = 8{,}700$ Hz.

2.11 *Onda Estacionaria II.* Una esfera de masa M está sostenida por una cuerda que pasa sobre una barra horizontal de longitud L. Si el ángulo formado de la cuerda con la barra es θ y la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la cuerda es f, calcular la masa de la cuerda.



R. La frecuencia fundamental de vibración de la cuerda es:

$$f = \frac{v}{2L'}.$$

La velocidad de propagación de la onda en la cuerda depende de la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2L'f, \;\; \mu = \frac{T}{4L'^2 f^2} = \frac{m}{L'},$$

en donde m es la masa de la cuerda debe satisfacer:

$$m = \frac{T}{4L'f^2} = \frac{Mg}{4\,L'\sin\theta f^2} = \frac{Mg}{4\,Lf^2 \tan\theta}.$$

La última expresión proviene de la relación trigonométrica $L = L' \cos\theta$.

2.12 *Onda Sonora.* Una onda sonora de 75 dB llega a un tímpano de área $5\times10^{-5}\mathrm{m}^2$. (a) Calcular la energía absorbida por el tímpano en 1 segundo. (b) Calcular la amplitud de presión de la onda.

R. (a) Si $\beta = 75$ dB, y $\beta = 10\log_{10}(\langle I\rangle/I_0)$, entonces $\langle I\rangle = 10^{-4.5}$ W/m^2. La energía absorbida se estima como $\varepsilon = \langle I\rangle At = 1.58\times10^{-9}$ J. (b) La amplitud de presión es

$$(\Delta p)_M = \sqrt{2\rho_0 v\langle I\rangle} = 0.16\ \mathrm{N/m^2}.$$

2.13 *Niveles de Intensidad (I).* Dos ondas sonoras poseen iguales amplitudes de desplazamiento u_0, pero la primera onda posee la tercera parte de la frecuencia de la segunda. Calcular la diferencia en los niveles de intensidad de las ondas.

R. El nivel de intensidad de una onda sonora se define por: $\beta = 10\log_{10}(\langle I\rangle/I_0)$. La intensidad promedio de la onda, en términos de la amplitud de desplazamiento es:

$$\langle I\rangle = \frac{(Bku_0)^2}{2v\rho_0}.$$

Si consideramos que la frecuencia de la primera onda es una tercera parte de la de la segunda, $\omega_1 = \omega_2/3$, la relación de sus intensidades es: $\langle I_1\rangle = \langle I_2\rangle/9$. La diferencia de los niveles de intensidad es $\beta_2 - \beta_1 = 10\log_{10}(\langle I_2\rangle/I_0) - 10\log_{10}(\langle I_1\rangle/I_0) = 10\log_{10}(\langle I_2\rangle/\langle I_1\rangle) = 10\log_{10}(9) = \mathbf{9.54\ dB}$.

2.14 *Un alambre de acero de diámetro 0.2 mm* está sometido a una tensión de 200 N. Determinar la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre.

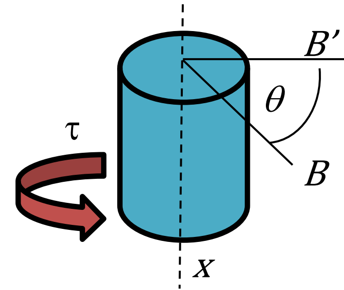
R. Cuando la barra realiza movimientos de corte (o cizalladura), ésta experimenta un esfuerzo tangencial δ (N/m^2) relacionado con el módulo de torsión G por:

$$\delta = G\frac{\partial y}{\partial x},$$

en donde y corresponde al desplazamiento transversal de la barra con respecto al punto de equilibrio. La sección de masa que se desplaza con aceleración $\partial^2 y/\partial t^2$ es $\rho A\Delta x$ siendo ρ la densidad de masa, y A el área transversal de la barra. Comparando con el ejemplo de la propagación transversal de las ondas en un hilo tenso, es posible deducir una relación directa entre la tensión T y el módulo *G: T= GA.* La velocidad de propagación de una onda de corte en una barra se calcula como (d-diámetro del alambre, $\rho = 8\times10^3$ kg/m^3):

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\rho A}} = \sqrt{\frac{4T}{\pi\rho d^2}} = 892.062\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Comparar con la velocidad de las ondas longitudinales en el mismo material, $\sim 10^4$ m/s.



2.15 *Una barra de sección transversal* circular de radio R se tuerce como consecuencia de un torque aplicado en torno a su eje. Probar que si θ es el ángulo de torsión en un punto x sobre la abscisa, el torque es

$$\tau = \frac{1}{2}AGR^2\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

donde $A = \pi R^2$ es el área de las sección transversal.
R. El torque de restitución angular es proporcional a la deformación:

$$\tau \propto \frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Estamos interesados en calcular el torque necesario para girar una barra de longitud L a través de un ángulo θ. Considerando primero un cilindro hueco de radio r y espesor dr. El momento de la fuerza de corte es:

$$d\tau = rf_\theta dS = 2\pi r^2 f_\theta dr.$$

La fuerza de corte se calcula aproximadamente en términos de la deformación y el módulo de corte G como:

$$f_\theta \approx G\frac{\partial\zeta}{\partial x} \approx G\frac{\partial(r\theta)}{\partial x} \approx Gr\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

El torque total sobre la barra de radio *R.*

$$\tau = \int_0^R d\tau = \int_0^R 2\pi Gr^3\frac{\partial\theta}{\partial x}dr = \frac{\pi GR^4}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{2}AGR^2\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

El torque neto en un segmento de longitud Δx es:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\Delta x = \frac{1}{2}AGR^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Delta x,$$

mientras que el elemento de inercia con respecto al eje de simetría es $\frac{1}{2}\Delta mR^2 = \frac{1}{2}\pi\rho R^4\Delta x = \frac{1}{2}\rho AR^2\Delta x$. Igualando con $\Delta I\partial^2\theta/\partial t^2$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}.$$

La velocidad de propagación de la onda de torsión es:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

PR 2.3. Un satélite consiste de dos cilindros, cada uno de 510 kg de masa y 0.25 m de radio. Éstos están conectados en sus centros por una barra de 0.50 m. La barra produce un torque de torsión de 10^5N.m/rad. Si la primera mitad experimenta una torsión con un ángulo de 1°, describir el movimiento subsecuente del satélite y calcular su periodo (Ver Ej. **2.15**).

R. Se formarán ondas estacionarias de torsión en la longitud de la barra, con una velocidad igual a:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

en donde G es el módulo de corte y ρ su densidad de masa. Dependiendo del modo de vibración del sistema, es posible plantear la frecuencia de la onda asociada al mismo. Para el modo fundamental (extremos libres):

$$f_1 = \frac{v}{2L}.$$

El ángulo de deformación de la barra central con respecto a su posición de equilibrio está dado por:

$$\theta(x,t) = \theta_0 \cos(2\pi f_1 t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

mientras que la distribución del momento de fuerza es:

$$\tau = \frac{1}{2} AGR^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

El valor del máximo torque producido por la barra es proporcional al ángulo de torsión:

$$\tau_{max} = \frac{\pi AGR^2}{2L}\theta_0 = \kappa\theta_0,$$

el cual se presenta en los extremos de la barra. En el caso de dos cilindros acoplados en los extremos, el torque neto que éstos experimentan es (en magnitud):

$$2\kappa\theta_0 = I\omega^2\theta_0 = 2\frac{Mr^2}{2}\omega^2\theta_0,$$

con r como el radio de los cilindros y M su masa.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mr^2}{2\kappa}} = 0.079 \text{ s}.$$

Un desarrollo más completo implica involucrar el dato de la densidad de masa de la barra de acople y las condiciones de contorno en los extremos de la barra. La relación entre el torque y el ángulo de torsión está dada por $\tau = -\kappa\theta$, con $\kappa = 10^5$ N.m/rad.

2.16 *Constante elástica de un resorte.* (a) Demostrar que para un resorte, la constate K está dada por $\pi G a^4/2R^2$, donde a es el radio del alambre y R el radio del resorte. (b) Hallar el valor de K para un resorte de acero de radio 1 cm hecho de alambre de radio 1 mm. Si la longitud del resorte sin estirar es de 50 cm, hallar su elongación cuando se le aplica una fuerza de 50 N. El módulo de corte del acero puede aproximarse como 79.3 GPa.

R. (a) Consideremos que el resorte es estirado axialmente en cada extremo por un par de fuerzas opuestas F la cual deforma al resorte una pequeña cantidad ζ. Dado que F y ζ están relacionadas linealmente, el trabajo realizado al deformar el resorte es:

$$W = \frac{1}{2}F\zeta,$$

el cual proviene de la energía potencial elástica de torsión con $\tau \approx \pi G a^4 \theta/2l$,

$$V = \frac{1}{2}\tau\theta = \frac{l}{\pi G a^4}\tau^2 = \frac{l}{\pi G a^4}F^2R^2,$$

En donde a es el radio del alambre y R el radio del resorte. El torque ejercido por la fuerza axial F sobre el alambre es igual a FR. Igualando W y V, obtenemos: $(F = k\zeta)$

$$K = kl = \frac{\pi G a^4}{2R^2}.$$

(b) Utilizando $G = 79.3$ GPa para el acero, $k = 2.49 \times 10^3$ N/m. Al aplicar una fuerza de tensión de 50 N, la elongación es $\delta = 2$ cm.

2.17 *Onda sonora en un metal.* Una barra metálica de 30 m tiene una densidad de 5000 kg/m^3. Las ondas sonoras longitudinales tardan 5 ms en viajar desde un extremo al otro. Calcule el módulo de Young del metal.

R. Un pulso sonoro se propaga a una velocidad $v = \sqrt{Y/\rho}$. Es posible también estimar esta velocidad desde los datos suministrados: $v = L/t = 6000$ m/s. El módulo de Young es por lo tanto: $Y = v^2\rho = 1.8 \times 10^{11}$Pa.

2.18 *Módulo de Elasticidad de un líquido.* En un líquido con $\rho = 900$ kg/m^3, se determina que ciertas ondas longitudinales con frecuencia de 250 Hz tienen una longitud de onda de 8.0 m. Calcule el módulo del líquido.

R. Utilizamos $B = \rho(\lambda f)^2 = 3.6 \times 10^9$ Pa.

2.19 *Niveles de Intensidad (II).* Demostrar que si se duplica la intensidad de una onda sonora, el nivel de intensidad aumenta aproximadamente en 3 dB.

R. La diferencia en los niveles de intensidad en las dos situaciones es: $\beta_2 - \beta_1 = 10\log_{10}(\langle I_2\rangle/\langle I_1\rangle) = 10\log_{10}(2) = \mathbf{3.01\ dB.}$ Si la intensidad de una sonora se duplica, el nivel de intensidad asociado a la segunda onda aumenta en 3 dB.

2.20 *Amplitud de Presión.* Un pistón situado en un extremo de un tubo largo lleno de aire a temperatura ambiente y a la presión normal oscila con una frecuencia $\omega_0 = 3.14 \times 10^3$ rad/s y una amplitud de $u_0 = 0.1$ mm. El área del pistón es $S = 100$ cm^2.

(a) Calcular la amplitud de presión de las ondas generadas en el tubo.

La amplitud de presión está dada por: $(\Delta p)_{máx} = Bku_0 = v^2\rho_0 ku_0$. Numéricamente: $B \approx 1.42 \times 10^5$ Pa, $\rho_0 \approx 1.3$ kg/m^3, $k = \omega_0/v$. La amplitud de presión es por lo tanto: $(\Delta \boldsymbol{p})_{\boldsymbol{máx}} \approx \mathbf{134.9}$ **Pa.**

(b) Cuál es la intensidad de las ondas?.

La intensidad (promedio) de las ondas es:
$\langle I\rangle = ((\Delta p)_{máx})^2/2v\rho_0 \approx 21.21$ W/m^2.

(c) Despreciando los efectos de fricción, qué potencia media se necesita mantener oscilando el pistón?.

Retomando la definición de potencia media: $\langle P\rangle = \langle I\rangle \times S$, en donde S corresponde al área transversal del pistón. $\langle \boldsymbol{P}\rangle = \mathbf{0.212}$ **W**.

(d) Escribir la ecuación de onda asociada a las ondas de presión en el tubo.

La ecuación de onda se escribe como:

$$\Delta p(x,t) = (\Delta p)_{máx}\cos(kx - \omega_0 t)$$

$\Delta p(x,t) = 134.9\cos(9.5x - 3.14 \times 10^3 t)$ Pa.

Nota: Estos valores están asociados a un módulo de compresibilidad (adiabático) del aire. $B \approx 1.42 \times 10^5$ Pa.

2.21 *Niveles de Intensidad (III).* Expresar en dB la diferencia en los niveles de intensidad de dos ondas sonoras si la amplitud de presión en una de ellas es el **doble** de la otra.

R. $\beta_1 = 10\log_{10}\left({}^{I_1}/{}_{I_0}\right)$; $\beta_2 = 10\log_{10}\left({}^{I_2}/{}_{I_0}\right)$. Si $I_1 = 4I_2$; la diferencia en los niveles de intensidad es: $\beta_1 - \beta_2 = 10\log_{10}\left({}^{I_1}/{}_{I_2}\right) = 10\log_{10}(4) = 6.02$ dB.

2.22 *Efecto Doppler (I).* Un proyectil avanza a una velocidad v_p hacia un objetivo que se desplaza en dirección opuesta a una velocidad $v_p/2$. Si el proyectil emite pulsos a una frecuencia f_0, (a) Calcular la frecuencia de la señal que detecta el proyectil después de reflejarse en el objetivo. (b) Calcular la diferencia de estas frecuencias. Suponga que la velocidad de propagación del sonido en el medio es v_w.



(a) Utilizamos la fórmula para la variación en la frecuencia de la onda debido al movimiento de la fuente y/o observador (Efecto Doppler):

$$f_{observador} = \frac{1 - \frac{\hat{v}_w \cdot \vec{v}_{observador}}{v_w}}{1 - \frac{\hat{v}_w \cdot \vec{v}_{fuente}}{v_w}} f_{fuente},$$

en donde $\hat{v}_w$ es el vector unitario en la dirección de propagación del frente de onda en dirección relativa hacia el observador. Cuando el proyectil emite un pulso de frecuencia f_0, el observador, inicialmente localizado en el objetivo a velocidad $v_p/2$ recibirá una señal con frecuencia:

$$f' = \frac{1 + v_p/2v_w}{1 - v_p/v_w} f_0.$$

Una señal con frecuencia f' se reflejará instantáneamente en el objetivo, convirtiéndole en fuente. Aplicando el mismo razonamiento, la frecuencia de retorno al proyectil es:

$$f'' = \frac{1 + v_p/v_w}{1 - v_p/2v_w} f'.$$

Combinado las dos ecuaciones, tendremos:

$$f'' = \left(\frac{1 + v_p/v_w}{1 - v_p/2v_w}\right)\left(\frac{1 + v_p/2v_w}{1 - v_p/v_w}\right) f_0.$$

b) La diferencia entre la frecuencia emitida y la frecuencia que retorna al proyectil se obtiene como: $\Delta f = |f_0 - f''|$.

2.23 *Onda Estacionaria III*. Una onda estacionaria en una cuerda está representada por la siguiente función:

$$y(x,t) = 0.1\sin(\pi x)\cos(20\pi t),$$

en unidades de metros y segundos.

(a) Obtener la velocidad de propagación de la onda.

R. $v = \omega/k = 20\pi/\pi = 20$ m/s.

(b) Calcular la distancia entre dos nodos consecutivos de la onda estacionaria.

R. La posición de los nodos se obtiene cuando $y(x_n, t) = 0$. En este caso, $\sin(\pi x_n) = 0$; o $\pi x_n = n\pi, n = 1,2, \ldots$ La distancia entre nodos consecutivos es: $x_{n+1} - x_n = 1$ m.

(c) Determine el valor máximo de la velocidad de un punto ubicado a 75 cm desde uno de sus extremos.

R. $v = \partial y/\partial t = -2\pi\sin(0.75\pi)\sin(20\pi t)$. El valor máximo de la velocidad transversal en ese punto es: $v_{max} = |-2\pi\sin(0.75\pi)| = \sqrt{2}\pi$ m/s. (d) Determine las funciones de onda superpuestas.

R. $y(x,t) = 0.05\sin(\pi x - 20\pi t) + 0.05\sin(\pi x + 20\pi t)$.

2.24 *Ondas en una cuerda.* La cuerda A de un violín (Nota La) mide 32 cm de largo entre dos puntos fijos con una frecuencia fundamental de 440 Hz y una densidad lineal de 5×10^{-4} kg/m. (a) Cuál es la velocidad de la onda? (b) Calcular la tensión en la cuerda.

R. (a) La velocidad de propagación de la onda se calcula con la expresión:

$v = \lambda f$. Si la cuerda vibra en su modo fundamental, la longitud de onda asociada a este modo de vibración es el doble la longitud de la cuerda, es decir $\lambda = 2L$. Reemplazando los valores: $v = 281.6$ m/s. (b) La tensión de la cuerda se obtiene desde el valor de la velocidad y la densidad lineal de masa: $T = \mu v^2 = 39.6$ N

(a) Demuestre que la velocidad de las ondas transversales en un muelle tensado es $v = \sqrt{kL(L-l)/M}$, donde k es la constante del resorte, l es la longitud del muelle sin deformar, L es la longitud del resorte tensado y M es la masa del resorte. (b) Para el caso $L >> l$, demuestre que el tiempo Δt para que una onda viaje desde un extremo del muelle al otro es $\Delta t = \sqrt{M/k}$. La característica interesante de este resultado es que Δt es independiente de la longitud L del resorte. Mientras más tenso se encuentre el resorte, la onda viajará más rápido, de manera que el tiempo sólo depende de la masa y la constante de restitución.

R. (a) En analogía con el cálculo asociado a la propagación de una onda transversal en una cuerda, la tensión del resorte es $F = k(L-l)$, mientras que su densidad lineal de masa (del resorte tenso) es M/L:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{kL(L-l)}{M}}.$$

(b) El tiempo que tarda el pulso en recorrer una longitud $L >> l$ es:

$$v \approx \sqrt{\frac{k}{M}}L;$$

$$\Delta t = \frac{L}{v} \approx \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

PR 2.4. (a) Calcular la derivada de la velocidad de una onda en una cuerda con respecto a la tensión dv/dT y demostrar que los diferenciales dv y dT obedecen la expresión

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}.$$

(b) Una onda se mueve con una velocidad de 300 m/s sobre un alambre sometido a una tensión de 500 N. Hallar la variación de la tensión necesaria para aumentar la velocidad a 312 m/s. (c) Hallar la variación porcentual de la tensión que se necesita para aumentar la frecuencia del armónico fundamental de un hilo de piano con extremos fijos de 260 a 262 Hz.

R. (a) Si $v = \sqrt{T/\mu}$,

$$dv = \frac{dT}{2\sqrt{T\mu}} = \frac{TdT}{2T\sqrt{T\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}v\frac{dT}{T}.$$

De la última expresión:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}.$$

$$\frac{dT}{T} = 2\frac{dv}{v} = 2 \times \frac{12}{300} = 0.08.$$

Aplicando 500 N, el cambio debe ser de unos 40 N (La nueva tensión debe ser de 540 N). (c) La frecuencia del armónico fundamental es:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Análogamente:

$$\frac{df_1}{f_1} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T};$$

y la variación porcentual es del orden de $dT/T = 2 \times 2/260 = 0.0154$ (1.54%).

2.25 *Un resorte que tiene una longitud normal* de 1 m y una masa de 0.2 kg se estira 4 cm cuando se aplica una fuerza de 10 N. Hallar la velocidad de propagación de las ondas *longitudinales* a lo largo del resorte.

R. La fuerza de deformación del resorte por unidad de longitud en un punto es:

$$F = K\varepsilon = K\frac{\partial\zeta}{\partial x}.$$

En un segmento de ancho Δx la fuerza neta por unidad de longitud a la cual está sometido el elemento es:

$$\left(K\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_2 - \left(K\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_1 = K\Delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = \frac{\Delta M}{L}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2},$$

En donde ΔM es un elemento de masa del resorte. La relación con la masa total es: $\Delta M = (M/L)\Delta x$. En el límite $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{M}{KL^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2},$$

y la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es:

$$v = \sqrt{\frac{KL^2}{M}}.$$

La constante de restitución es: $K = 10/0.04 = 250\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, mientras que la velocidad de propagación es 35.35 m/s.

2.26 *Dos armónicos sucesivos* en un tubo de órgano son 450 Hz y 550 Hz. ¿El tubo está cerrado por un extremo o abierto en ambos? ¿Cuál es la longitud del tubo? ($v_{aire} = 344$ m/s).

La diferencia entre las frecuencias sucesivas es:

$$(550 - 450)\text{Hz} = 100\text{ Hz} = \frac{v}{2L},$$

relación que se cumple independientemente si el tubo tiene ambos extremos abiertos o uno cerrado. La longitud del tubo es:

$$L = 172\text{ cm}.$$

La frecuencia fundamental para un tubo con un extremo cerrado es:

$$f_{fundamental} = \frac{v}{4L} = 50\text{ Hz}$$

la cual es un múltiplo entero de 550 Hz y 450 Hz. Los armónicos sucesivos son $m = 9$ y $m = 11$.

2.27 *Efecto Doppler (II).* Una fuente de ondas sonoras que se desplaza con velocidad constante e igual a la mitad de la velocidad del sonido en sentido positivo del eje X, partiendo desde el origen de coordenadas, emite una señal con una frecuencia f_0. Calcular la frecuencia que detecta un observador en reposo ubicado en el origen.
R. Utilizando la fórmula para la frecuencia detectada por el observador, obtenemos:

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v_S}{v_W}}.$$

Si velocidad de la fuente es la mitad de la velocidad del sonido, $v_S = v_W/2$.

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}f_0.$$

2.28 *Efecto Doppler (III).* El tono de un silbato de una locomotora es de 500 Hz. Determinar la frecuencia del sonido que escucharía una persona en la estación si el tren se mueve con una velocidad de 72 km/h (a) acercándose a la estación (b) alejándose de la estación.
R. Con $v_w = 340$ m/s, en el caso (a) utilizamos:
$f_{obs} = f_S/\left(1 - {}^{v_s}/_{v_w}\right) = 530.2$ Hz. En el caso (b) $f_{obs} = f_S/\left(1 + {}^{v_s}/_{v_w}\right) = 469.8$ Hz.

2.29 *Efecto Doppler (IV).* Un vehículo de una patrulla de tránsito está equipado con un radar que emite frecuencias ultrasónicas de 2100 MHz y se desplaza a una velocidad de 40 m/s. El haz es reflejado desde un móvil que viaja a 20 m/s. Cuál es el desplazamiento de la frecuencia de la señal reflejada que es recibida por la patrulla?. Suponer que el móvil y la patrulla se mueven en la misma dirección.
R. El móvil (inicialmente observador) se convierte en fuente una vez el haz ha alcanzado su posición. La frecuencia de la onda reflejada detectada por la patrulla es:

$$f' = f_{patrulla}\frac{(1 - v_{móvil}/v_w)(1 + v_{patrulla}/v_w)}{(1 + v_{móvil}/v_w)(1 - v_{patrulla}/v_w)} = 2370.2\text{ MHz}.$$

La diferencia de frecuencias es de 270.2 MHz.

2.30 *Ondas elásticas en una barra.* En una barra de acero se transmiten ondas longitudinales a través de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 4 mm, la amplitud de las oscilaciones es de 0.1 mm y la frecuencia es de 10 Hz. Hallar (a) La ecuación de onda que se propaga a lo largo de la barra, (b) La energía por unidad de volumen de las excitaciones, (c) la potencia promedio transferida.
R. La velocidad de propagación de la onda se relaciona con el módulo de elasticidad de Young (Pa) y la densidad de masa ($\mathrm{kg/m^3}$):

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{11}}{8\times 10^{3}}} = 10^{4}\mathrm{m/s}.$$

(a) La ecuación para las deformaciones en la barra es:

$$u(x,t) = 10^{-4}\sin(0.0125x - 62.8t)\,\mathrm{m}$$

(b) La energía por unidad de volumen es: $\langle e\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_0^2 = 0.316\ \mathrm{J/m^3}$.
(c) La potencia promedio transferida $\langle P\rangle = Sv\langle e\rangle = 0.2$ mW. S corresponde al área de la sección transversal de la barra.

2.31 *Tubos Sonoros.* Un tubo de órgano tiene dos armónicos sucesivos con frecuencias de 400 Hz y 560 Hz. Considere que la rapidez del sonido en el aire es 344 m/s. Está el tubo abierto o cerrado?. (b) De cuáles armónicos se trata? (c) Qué longitud tiene el tubo?.

R. Las frecuencias de los armónicos asociados a un tubo abierto están dadas en múltiplos enteros de su frecuencia fundamental $f_n = nv/2L$, con $n = 1,2,3,\dots$, mientras que para un tubo con un extremo cerrado, $f_m = mv/4L$, con $m = 1,3,5,7,\dots$. En ambos casos, la diferencia entre armónicos consecutivos es $f_{n+1} - f_n = v/2L$. Por lo tanto, la longitud del tubo se obtiene directamente desde la diferencia de los armónicos consecutivos: 160 Hz, es decir (c) $L = v/2\Delta f = 1.075$ m. La frecuencia de los armónicos fundamentales en ambos casos corresponde a 160 Hz (tubo abierto) y 80 Hz (tubo cerrado). Para frecuencias de 400 y 560 Hz, el orden de los armónicos corresponden a $m = 5$ y $m = 7$ respectivamente (tubo cerrado).

2.32 *Onda de Deformación.* Deformaciones en una barra se propagan en forma de onda armónica y poseen una amplitud Ψ_0 y longitud de onda λ. Esta onda incide sobre una juntura. Si el número de onda asociado a la onda que se propaga en la segunda barra es $2k$, hallar: (a) Las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada y (b) La potencia transmitida en términos de la potencia incidente.

R. (a) Utilizando la fórmula del problema anterior, obtenemos la amplitud de la onda resultante:

$$\Psi_{\mathrm{r}} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\Psi_0 = \frac{\Psi_0}{3},$$

mientras que la amplitud de la onda transmitida es:

$$\Psi_{\mathrm{t}} = \frac{2}{3}\Psi_0.$$

(b) La potencia transmitida a la segunda barra es: $\langle P\rangle = Sv\langle e\rangle$, ($S$ como la sección transversal de la barra), $\langle e\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\Psi_t^2$ y $v = \omega\lambda/4\pi$, como la velocidad de propagación de la onda en el segundo medio, en términos de la longitud de onda en el primer medio λ.

2.33 *Diferencia de fase de una onda sonora.* Si las ondas de presión en una columna de gas están descritas a través de:

$$\Delta p(x,t) = (\Delta p)_M \sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right],$$

demostrar que las ondas de desplazamiento molecular asociada a esta onda de presión tiene un desfase de un cuarto de longitud de onda.

R. La onda de desplazamiento molecular se obtiene desde la variación de presión integrando en el espacio la relación:

$$u(x,t) = -(\Delta p)_M B^{-1} \int \sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right] dx$$

La expresión final para $u(x,t)$ es:

$$u(x,t) = \frac{\lambda(\Delta p)_M}{2\pi B}\cos\left[\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right] = \frac{\lambda(\Delta p)_M}{2\pi B}\sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right].$$

Manipulando el argumento de la última función, tendremos:

$$u(x,t) = \frac{\lambda(\Delta p)_M}{2\pi B}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x + \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{2\pi t}{T}\right].$$

Es claro que la onda de presión y la onda de desplazamiento molecular están desplazadas por un cuarto de longitud de onda.

2.34 *Nivel de Intensidad (IV).* Calcular el nivel de intensidad de una onda sonora (en dB) que corresponde a una amplitud de desplazamiento molecular del aire de 0.1 mm que oscilan a 80 Hz.

R. Utilizamos la relación $\langle I\rangle = \rho v\omega^2 u_0^2/2 = 0.52\ \mathrm{W/m^2}$, para la intensidad promedio de una onda sonora, en donde ρ corresponde a la densidad de masa del aire en condiciones normales (1.2 $\mathrm{kg/m^3}$), y $v = 340\ \mathrm{m/s}$. El nivel de intensidad es $\beta = 10\log_{10}[\langle I\rangle/I_0] = 117.12\ \mathrm{dB}$, con $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Este nivel de intensidad se acerca al umbral del dolor para el oído humano (~120 dB).

2.35 *Nivel de Intensidad (V).* Los niveles de intensidad de dos ondas sonoras difieren en 10 dB. Hallar el cociente entre sus intensidades y sus amplitudes de presión.

R. Si la diferencia entre los niveles de intensidad es 10 dB, entonces:

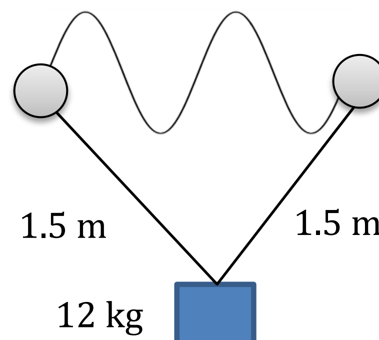
$$\beta_2 - \beta_1 = 10\ \mathrm{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{\langle I_2\rangle}{\langle I_1\rangle}\right].$$

El cociente entre sus intensidades es $\langle I_2\rangle/\langle I_1\rangle = 10$, mientras que entre sus amplitudes de presión, [teniendo que cuenta que $\langle I\rangle \sim (\Delta P)^2$] es

$$\frac{(\Delta P_2)}{(\Delta P_1)} = \sqrt{10} = 3.16.$$

2.36 *Silbato.* El silbato que Ud. utiliza para llamar a su perro de caza tiene una frecuencia de 21 kHz, pero su perro lo ignora. Se sospecha que el silbato no está funcionando, pero también se sabe que el oído humano no puede escuchar sonidos por encima de 20 kHz. Con el fin de ensayarlo, Ud. le pide a un amigo (en reposo) que utilice el aparato cuando Ud. monta su bicicleta. En cuál dirección deberá Ud. dirigirse (alejándose o acercándose a su amigo) y cuál es la mínima velocidad necesaria para saber si el silbato realmente funciona?.
R. La frecuencia que percibe el observador en movimiento debe ser al menos de 20 kHz. La frecuencia de la fuente (silbato) es de 21 kHz. Utilizamos $v_S = 0$, y $v_W = 340$ m/s. Así: $f_{obs} = (1 - \hat{v}_W \cdot \vec{v}_{obs}/v_w) f_{fuente}$. Como $f_{obs} < f_{fuente}$ los vectores $\hat{v}_W$ y $\vec{v}_{obs}$ deben ser paralelos, por lo tanto, Ud. debe viajar alejándose de la fuente con una velocidad mínima de $v_{obs} = 16.19$ m/s.

2.37 *Ondas estacionarias en una cuerda.* Una masa de 12 kg cuelga en equilibrio de una cuerda de longitud total $L = 5$ m y densidad lineal de masa $\mu = 0.001$ kg/m. La cuerda pasa por dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia de 2 metros. Determine (a) La tensión en la cuerda (b) La frecuencia de vibración necesaria para formar el patrón de las ondas estacionarias mostrado en la figura.



R. (a) Considerando el diagrama de fuerzas ilustrado, $2T\cos\theta = W$. Despejando, **T = 78.75 N.** (b) El patrón de ondas estacionarias corresponde a $L = 2\lambda$. La frecuencia de la onda estacionaria se define por:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2v}{L} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \mathbf{280.6\ \mathit{Hz}}.$$

2.38 *Onda Sonora.* Una onda sonora armónica en el aire a 20°C y presión normal, tiene una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 10^{-8} m. (a) Escribir una expresión que describa la onda de desplazamiento. (b) Escribir una expresión para la onda de presión. (c) Expresar el nivel de intensidad de esta onda en dB.

R. (a) La ecuación para la onda de desplazamiento puede aproximarse sin pérdida de generalidad por:

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t).$$

Los valores numéricos que corresponden a la amplitud, la frecuencia y el número de onda son:

$$u_0 = 10^{-8}\ \text{m}$$

$$\omega = 1000\pi \text{ r/s}$$
$$k = \frac{\omega}{v} = 9.16 \text{ m}^{-1}$$

La velocidad de la onda sonora se aproxima a 343 m/s a 20 °C y presión atmosférica.

$$u(x,t) = 10^{-8}\sin(9.16x - 1000\pi t) \quad \text{m.}$$

(b) La onda de presión se describe a través de la relación:

$$p = p_0 - B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = p_0 - v^2\rho_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = p_0 - v^2\rho_0 k u_0 \cos(kx - \omega t).$$

ρ_0 es la densidad del aire en equilibrio, aproximadamente 1.23 kg/m^3. Numéricamente, el cambio de presión local debido a la onda sonora es:

$$p - p_0 = -v^2\rho_0 k u_0 \cos(kx - \omega t) = -\,0.0133\cos(9.16x - 1000\pi t) \text{ Pa.}$$

(c) La intensidad promedio de la onda sonora se obtiene desde el cambio máximo de presión:

$$\langle I\rangle = \frac{(\Delta p)_M^2}{2\rho_0 v} = 2.08\times 10^{-7}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

El nivel de intensidad es:

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{\langle I\rangle}{I_0}\right) = 53.21 \text{ dB.}$$

2.39 *El extremo* de una cuerda horizontal está sujeto a uno de los brazos de un diapasón de frecuencia 240 Hz operado eléctricamente. El otro extremo pasa por una polea y soporta un peso de 3 kg. La masa por unidad de longitud de la cuerda es de 0.020 kg/m. (a) Cuál es la velocidad de las ondas transversales de la cuerda? (b) Cuál es la longitud de onda?.

R. (a) La tensión en la cuerda es $T = 29.4$ N, y su velocidad es $v = \sqrt{T/\mu} = 38.34$ m/s. (b) La longitud de onda es: $\lambda = v/f = 15.98$ cm.

2.40 *Tubo Sonoro, extremo abierto*. La frecuencia de la nota **Do** central es de 262 Hz. a) Si un tubo de órgano está abierto en un extremo y cerrado en el otro, ¿qué longitud debe tener para que su modo fundamental produzca esta nota a 20 °C (i.e., la velocidad del sonido a esta temperatura es aproximadamente $v = 345$ m/s)?.

R. Para un tubo con un extremo abierto, la frecuencia del modo fundamental es:

$$f_1 = \frac{v}{4L}; \qquad L = \frac{v}{4f_1} = 32.92 \text{ cm}$$

PR 2.5. Las funciones de dos ondas estacionarias sobre una cuerda de longitud L son

$$y_1(x,t) = A_1\cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x), \qquad y_2(x,t) = A_2\cos(\omega_2 t)\sin(k_2 x),$$

en donde $k_n = n\pi/L$ y $\omega_n = n\omega_1$. La función de la onda resultante se expresa como:

$$y_r(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

(a) Hallar la velocidad de un segmento de la cuerda dx.
(b) Hallar la energía cinética de este segmento.
(c) Hallar la energía cinética total de la onda resultante.

R. (a) La velocidad instantánea de un segmento se obtiene desde

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y_r(x,t)}{\partial t} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t)\sin(k_1 x) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t)\sin(k_2 x).$$

(b) La energía cinética de este segmento es:

$$dE_K = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y_r(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx.$$

(c) La energía cinética total de la onda resultante se calcula por integración directa:

$$E_K = \int_0^L \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y_r(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\mu(\omega_1^2 A_1^2 \sin(\omega_1 t)^2 + \omega_2^2 A_2^2 \sin(\omega_2 t)^2) \times \frac{L}{2},$$

en donde se han utilizado los resultados

$$\int_0^L \sin^2(k_n x)dx = \frac{L}{2}; \quad \int_0^L \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,dx = 0, \qquad n \neq m.$$

Insertando el término de energía potencial elástica:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y_r(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}T(k_1^2 A_1^2 \cos(\omega_1 t)^2 + k_2^2 A_2^2 \cos(\omega_2 t)^2) \times \frac{L}{2}.$$

Con $\mu v^2 = T$ y $k_1^2 v^2 = \omega_1^2$, $k_2^2 v^2 = \omega_2^2$, la energía total de la onda es:

$$E_T = \frac{1}{4}\mu(\omega_1^2 A_1^2 + \omega_2^2 A_2^2) \times L.$$

Ver Ejercicio **2.115.**

2.41 *Una fuente de sonido* con una frecuencia de 8.46 kHz se mueve en dirección positiva de X con una velocidad de 34.8 m/s con respecto a un observador en aire calmado. ¿Qué frecuencia debería detectar el observador si éste se desplaza en sentido negativo de las X (acercándose mutuamente) a 5.2 m/s en aire calmado?.

R. Utilizando la fórmula de efecto Doppler (fuente y observador acercándose simultáneamente):

$$f_{obs} = \left[\frac{v_w + v_0}{v_w - v_F}\right] f_{fuente} = 9.55 \text{ kHz}.$$

2.42 *Ultrasonido Médico.* Una onda sonora de 2 MHz viaja por el abdomen de la madre y es reflejada por la pared cardiaca del feto, que se mueve hacia el receptor de sonido al latir el corazón. El sonido reflejado se mezcla con el transmitido, detectándose 120 pulsaciones por segundo. La rapidez del sonido en el tejido corporal es 1500 m/s. Calcule la velocidad de la pared cardiaca fetal en el instante que se hace la medición.
R. Utilizamos la expresión del efecto Doppler para este caso. En la primera situación, la onda del aparato viaja hacia el feto, y la frecuencia que éste captaría es:

$$f_0 = \left(1 + \frac{v_{feto}}{v_w}\right) f_{fuente}.$$

Esta onda es reflejada a la misma frecuencia f_0, convirtiendo al feto en fuente, y viaja hacia el aparato que detectará una frecuencia de **pulsación** de 120 Hz. Así, la frecuencia que retorna al aparato está diferenciada con respecto a la frecuencia original por 120 Hz. Es decir,

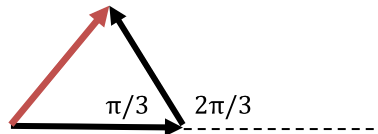
$$f'_0 = 2 \text{ MHz} + 120 \text{ Hz} = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{v_{feto}}{v_w}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{v_{feto}}{v_w}\right)}{\left(1 - \frac{v_{feto}}{v_w}\right)} f_{fuente}$$

Resolviendo para v_{feto}, obtenemos: $v_{feto} = 0.045$ m/s.

2.43 *Principio de Superposición, Interferencia.* Dos ondas que poseen igual amplitud u_0, velocidad y frecuencia, pero una diferencia de fase de $2\pi/3$ viajan en la misma dirección. (a) Hallar la amplitud de la onda resultante. (b) Suponer ahora que las amplitudes satisfacen $u_{01} = 2u_{02}$. Escribir una ecuación de proporcionalidad entre la intensidad promedio de la onda y la amplitud de la primera onda u_{01}.
R. (a) La amplitud de la onda resultante puede calcularse desde el teorema del coseno y la diferencia de fase relativa entre las dos ondas:

$$u_r = \sqrt{u_{01}^2 + u_{02}^2 - 2u_{01}u_{02}\cos\theta} = u_0.$$

Nota: θ es el ángulo de fase relativo es igual a $\pi/3$, según el diagrama ilustrado a continuación:



En este caso:

$$u_r = \sqrt{4u_{02}^2 + u_{02}^2 - 4u_{02}u_{02}\cos\theta} = \sqrt{3}u_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2}u_{01}.$$

La intensidad promedio en términos de la amplitud de la primera onda es: $\langle I\rangle \propto 3u_{01}^2/4$.

2.44 *Piano Afinado.* Un afinador de pianos estira un alambre de piano con una tensión de 600 N. El alambre de acero tiene 0.400 m de largo y una masa de 5.0 g. (a) Calcule la frecuencia de su modo de vibración fundamental. (b) Determine el armónico más alto que puede escuchar una persona cuyo límite de audición es de 10 kHz.
R. (a) La frecuencia del modo fundamental se obtiene como:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 273.86\ Hz.$$

(b) El orden del armónico más alto que puede escuchar una persona con un límite de audición de 10 kHz es:

$$10{,}000 = nf_1,$$

Con n como número entero más cercano al límite, $n = 36$.

2.45 *Ondas Estacionarias.* En un punto **A** de una cuerda de 2 m de longitud se superponen dos ondas armónicas procedentes de dos fuentes ***F₁*** y ***F₂***, en fase, situadas en los extremos de la cuerda. Si ambas ondas se propagan con una velocidad de 40 m/s como indica la figura, con una frecuencia de 100 Hz cada una y con igual amplitud de 0.20 m, determinar la ecuación de movimiento oscilatorio que adquiere el punto **A** localizado a 0.55 m de ***F₁***.

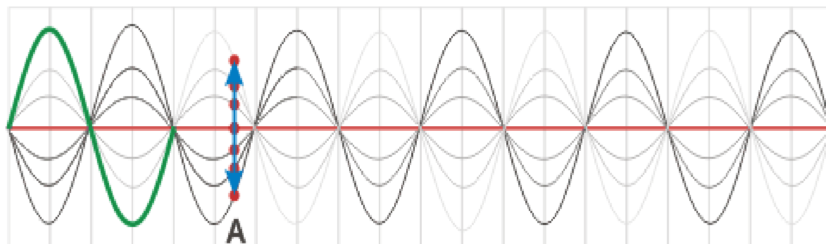


R. Este caso puede considerarse como el de una onda estacionaria formada por dos ondas armónicas que viajan en direcciones opuestas:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

La amplitud de oscilación en cada punto es $2A\sin(kx)$. Introduciendo los valores numéricos, con $x = 0.55$ m, la ecuación que describe la cinemática del punto **A** es:

$$y(0.55, t) = 0.28\cos(628t).$$



La doble flecha azul representa la oscilación del punto **A** (en rojo), cuya ecuación de posición en función del tiempo obtuvimos en el ejercicio. Obsérvese la aparición de nodos y antinodos alternados en todo el dominio de la cuerda.
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/No_me_salen/ONDAS/ond_013.html

2.46 *Interferencia de dos fuentes coherentes.* Dos altavoces idénticos están separados 2 metros y situados en los puntos **A** y **B**. Los altavoces están conectados por el mismo amplificador y producen ondas sonoras con una frecuencia de 880 Hz. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s. Se aleja un micrófono pequeño desde el punto **B** a lo largo de una línea que une a **B** y a **C** (línea **BC** en la figura). A qué distancias de **B** habrá interferencia (a) destructiva? (b) constructiva? (c) Si la frecuencia se hace lo suficientemente baja, no habrá posiciones sobre la línea **BC** en las ocurra interferencia destructiva. Qué tan baja debe ser la frecuencia para que esto suceda?.



R. En cualquier punto a una distancia *x* desde el punto **B** sobre la línea **BC** existe una diferencia de camino:

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + d^2} - x.$$

Se produce interferencia destructiva cuando del desfase de las ondas recibidas sea un múltiplo impar de π, i.e., π, 3π, 5π… :

$$\mathrm{k}\Delta r = \frac{2\pi f}{v}\Delta r = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$$

La ecuación para resolver para x es:

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = \frac{v}{2f}, \frac{3v}{2f}, \frac{5v}{2f} \ldots$$

El mínimo de orden 1 de interferencia destructiva (a la derecha de **B**) aparece cuando x es:

$$x_1 = \frac{4d^2 f^2 - v^2}{4vf} = 10.135 \text{ m}.$$

El mínimo de orden 3 está localizado en $x_3 = 3.11$ m. El mínimo de orden 5 (el cual es el más cercano a la derecha de **B**) $x_5 = 1.55$ m. La interferencia constructiva ocurre cuando la diferencia de fase es múltiplo par de π:

$$\mathrm{k}\Delta r = \frac{2\pi f}{v}\Delta r = 2\pi, 4\pi, 6\pi \ldots$$

En este caso:

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = \frac{v}{f}, \frac{2v}{f}, \frac{3v}{f} \ldots$$

Los máximos de interferencia estarán localizados en: $x_1 = 4.92$ m, $x_2 = 2.16$ m, $x_3 = 1.12$ m…En el caso c) consideramos que el primer mínimo de interferencia se encuentra localizado en un punto sobre la línea **AB**, es decir, $x = 0$. Aplicamos el límite $x \to 0$ y obtenemos $f = v/2d = 86$ Hz. El primer mínimo de interferencia estará localizado muy cercano a la fuente **B** si la frecuencia de la misma es del orden de 86 Hz.

2.47 *Una cuerda de guitarra* de 0.7 m está afinada para una frecuencia fundamental de 330 Hz. A qué distancia del extremo de la cuerda debe sostenerse con un dedo para que resuene a 440 Hz?.



R. La frecuencia de vibración fundamental en una cuerda de longitud L es:

$$f_1 = \frac{v}{2L}.$$

La velocidad de la onda en la cuerda es constante y sólo depende de la tensión en la misma y su densidad lineal de masa. Así, para el modo fundamental: $2f_1L_1 = 2f_2L_2$. La *longitud* en el segundo caso es $L_2 = L_1f_1/f_2 = 0.525$ m. La distancia desde el extremo en la cual debe presionarse la cuerda es**: $\mathbf{0.7 - 0.525 = 0.175}$ m (17.5 cm.)**

2.48 *Una de las cuerdas* de 63.5 cm de una guitarra se afina para producir la nota $\mathbf{A_2}$ ($f = 110$ Hz) cuando vibra en su modo fundamental. a) Calcular la velocidad v para las ondas transversales de la cuerda. b) Si la tensión de la cuerda aumenta en un 1%, cuál será su nueva frecuencia fundamental? c) Si la rapidez del sonido del aire circundante es 344 m/s, calcular f y λ para la onda sonora producida en el aire y compararlas con f y λ de la onda estacionaria en la cuerda.

R. a) En el caso de una onda estacionaria en el modo fundamental:

$$f_1 = \frac{1}{2L}v, \quad v = 2Lf_1 = 139.7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) La nueva tensión es $T' = 1.01T$, mientras que la nueva velocidad de propagación es $v' = \sqrt{1.01}v = 140.39$ m/s y la nueva frecuencia fundamental es 110.55 Hz. c) La frecuencia de vibración de las moléculas de aire es la misma que la frecuencia de vibración de los elementos de la cuerda: 110 Hz. La longitud de onda en el aire es 3.13 m, mientras en la cuerda es 1.27 m.

PR 2.6. Cuando una persona habla en tono normal, el nivel de intensidad del sonido es de unos 65 decibeles (dB) a 1 m. Estimar la potencia promedio de las ondas sonoras emitidas por los humanos.

R. La intensidad de la onda se puede estimar desde:

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{\langle I\rangle}{I_0}\right); \quad \langle I\rangle = 3.1623\times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

El cual es la intensidad de la onda a 1 m de distancia. La potencia de la fuente es:

$$P = 3.96\times 10^{-5}\ \mathrm{W}.$$

2.49 *Dos ondas sonoras,* una en el aire y la otra en el agua, poseen la misma intensidad. (a) Cuál es el cociente entre las amplitudes de las ondas en el agua y en el aire? (b) Cuál sería la razón de sus intensidades si las amplitudes de las ondas de presión fueran las mismas?

R. Utilizamos la relación entre la intensidad de la onda y la amplitud de desplazamiento:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 u_0^2.$$

(a) La relación de las intensidades es igual a uno:

$$\frac{\langle I_{aire}\rangle}{\langle I_{agua}\rangle} = \frac{\rho_{aire}v_{aire}u_{0aire}^2}{\rho_{agua}v_{agua}u_{0agua}^2} = 1.$$

$$\frac{u_{0aire}}{u_{0agua}} = \sqrt{\frac{\rho_{agua}v_{agua}}{\rho_{aire}v_{aire}}} = \sqrt{\frac{1000\times 1493.2}{1.2\times 344}} = 60.14.$$

(b) En este caso:

$$\frac{\langle I_{aire}\rangle}{\langle I_{agua}\rangle} = \frac{\rho_{agua}v_{agua}}{\rho_{aire}v_{aire}} = 3617.25.$$

2.50 *Una cuerda tensa* en sus dos extremos posee frecuencias de resonancia consecutivas de 420 Hz y 490 Hz. Hallar la frecuencia del modo fundamental.

R. En una cuerda tensa los modos de vibración están relacionados en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1: $f_n = nf_1$, con n como entero positivo. Dos frecuencias de resonancia consecutivas están dadas respectivamente como: f_{n+1} y f_n y su diferencia es:

$$f_{n+1} - f_n = (n+1)f_1 - nf_1 = f_1.$$

La diferencia entre dos frecuencias de resonancia consecutivas es la frecuencia fundamental de vibración de la cuerda: $f_1 = 490\ \mathrm{Hz} - 420\ \mathrm{Hz} = 70\ \mathrm{Hz}$.

2.51 *Una mecanógrafa que escribe* furiosamente en su máquina genera un sonido con un nivel de intensidad de 60 dB. Cuál es el nivel de intensidad que generan tres mecanógrafas igualmente ruidosas?.

R. Si una mecanógrafa produce un nivel de intensidad de 60 dB, la intensidad promedio asociada a la onda sonora es:

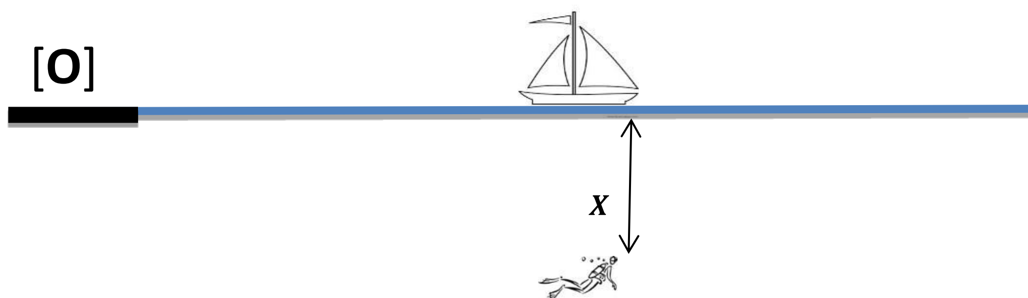
$$\beta = 10\log\left(\frac{\langle I\rangle}{I_0}\right);\ \ \langle I\rangle = 10^{-6}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Para tres mecanógrafas igual de ruidosas (pero en desfase), la intensidad se triplica, i.e.,

$$\langle I_t\rangle = 3\times 10^{-6}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

El nivel de intensidad en este caso es: $\beta_t = 10\log(\langle I_t\rangle/I_0) = 64.77$ dB.

2.52 *Un buzo* bajo la superficie de un lago escucha el sonido de la sirena de un bote en la superficie directamente encima de él al mismo tiempo que a un amigo (**O**) en tierra firme (en reposo) a 22.0 m del bote. La sirena está a 0.8 m sobre la superficie del agua. Calcular la profundidad en la que se encuentra el buzo en ese momento.



R. Considerando la velocidad de propagación del sonido en el aire como 344 m/s y la velocidad del sonido en el agua a 20 °C como 1482 m/s, el tiempo que tarda en escucharse la señal desde la sirena es (igual para la persona en la superficie y para el buzo):

$$t = \frac{d}{v} = \frac{22\ \mathrm{m}}{344\ \mathrm{m/s}} = 0.0634\ \mathrm{s}.$$

El buzo está ubicado a una distancia $x + 0.8$ metros desde la sirena. Por lo tanto:

$$x + 0.8 = v_{agua}t_{agua} + v_{agua}t_{aire}.$$

El tiempo que tarda la señal en recorrer 0.8 m en el aire es $t_{aire} = 0.8\ \mathrm{m}/344\ \mathrm{s} = 2.33\times 10^{-3}\mathrm{s}$. El tiempo que tarda en recorrer la señal en el agua es por lo tanto la diferencia:

$$t_{agua} = 0.0634\ \mathrm{s} - 2.33\times 10^{-3}\mathrm{s} = 0.061\ \mathrm{s}.$$

La profundidad del buzo es $\boldsymbol{x = v_{agua}t_{agua} = 90.51\ \mathrm{m}}$.

2.53 *La ecuación de variación* de la presión en una onda sonora armónica está dada por (en unidades S.I.):

$$\Delta p(x,t) = 2.2\sin\left(\frac{\pi}{3}x - 1700\pi t\right).$$

Determine (a) La velocidad propagación de la onda. (b) El máximo valor del desplazamiento de la onda u_0. Suponer que la densidad del medio es $\rho_0 = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$. (c) La magnitud del módulo de compresibilidad volumétrico *B.*
R. (a) La velocidad de propagación de fase se calcula como:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1700\pi}{\pi/3} = 5100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(b) El valor máximo del desplazamiento se obtiene de la fórmula:

$$u_0 = \frac{(\Delta P)_M}{v^2 \rho_0 k} = \frac{2.2}{(5100^2)(2.7 \times 10^3)(\pi/3)} = 2.99 \times 10^{-11}\ \text{m}.$$

(c) El módulo de compresibilidad se calcula desde la velocidad de propagación y la densidad del medio: $B = v^2 \rho_0 = 7.02 \times 10^{10}$ Pa.

2.54 *Un alambre de aluminio* de 30 m y un alambre de cobre de 20 m, ambos con diámetros de 1 mm, se conectan en sus extremos y se estiran aplicándole una tensión de 150 N. Calcular el tiempo en que tarda una onda transversal en viajar a través de la longitud total de los dos alambres. La densidad volumétrica de masa del aluminio es de 2700 kg/m^3 y del cobre es de 8930 kg/m^3.
R. El tiempo de recorrido se calcula utilizando la relación simple:

$$t = \frac{l_{Al}}{v_{Al}} + \frac{l_{Cu}}{v_{Cu}} = \frac{l_{Al}\sqrt{\pi d^2 \rho_{Al}} + l_{Cu}\sqrt{\pi d^2 \rho_{Cu}}}{2\sqrt{T}} = 0.25\ \text{s}.$$

La densidad lineal de masa se obtiene como:

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho \pi d^2}{4},$$

en donde d es el diámetro de la sección transversal del alambre.

2.55 *Dos autos* se desplazan en línea recta uno hacia el otro con la misma velocidad. La bocina de uno de ellos (3 kHz) está sonando y es escuchada por las personas en el otro auto con una frecuencia de 3.4 kHz. Hallar la velocidad que se desplazan los autos considerando que la velocidad del sonido es 340 m/s.
R. Utilizamos la formula general para el cálculo de la frecuencia del observador:

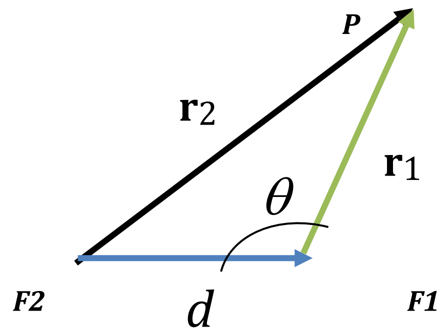
$$f_{observador} = \frac{1 - \dfrac{\hat{v}_w \cdot \vec{v}_{observador}}{v_w}}{1 - \dfrac{\hat{v}_w \cdot \vec{v}_{fuente}}{v_w}} f_{fuente}.$$

En este caso particular, la convención de signos conduce a:

$$f_{observador} = \frac{1 + \dfrac{V}{v_w}}{1 - \dfrac{V}{v_w}} f_{fuente}.$$

En la expresión anterior, V corresponde a la magnitud de la velocidad de los autos y v_w a la magnitud de la velocidad del sonido. Despejando V, con $f_{observador} = 3.4$ kHz, se obtiene $V = 21.25$ m/s.

2.56 *Suponga que dos parlantes están* separados 1 m, son excitados por un mismo oscilador y emiten un sonido de frecuencia 1150 Hz. Una persona está a 4.0 m de uno de los parlantes, ¿A qué distancia debe estar del segundo parlante para notar interferencia destructiva? Suponga que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 343 m/s.



La diferencia de camino en el punto ***P*** genera interferencia destructiva cuando:

$$|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343}{1150} \text{ m} = 0.30 \text{ m}.$$

El primer mínimo de intensidad ocurre para

$$|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| = 0.15 \text{ m}.$$

Utilizando propiedades de las desigualdades, $\big||\boldsymbol{d}| - |\boldsymbol{r_1}|\big| \leq |\boldsymbol{r_2}| \leq |\boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{r_1}|$; si la magnitud de $\boldsymbol{r_1}$ es 4 m, entonces la magnitud de $\boldsymbol{r_2}$ debe ser **menor de 5 m** y **mayor a 3 m** para el primer mínimo de interferencia. Para que se cumpla la condición $|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| = 0.15$ m, es suficiente con establecer

$$|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| \geq \big||\boldsymbol{r_2}| - |\boldsymbol{r_1}|\big|;$$

$$0.15 \geq \big||\boldsymbol{r_2}| - 4\big|$$

$$|\boldsymbol{r_2}| = 4.15 \text{ m},$$

El cual ocurre para un ángulo de $\theta = 91.594°$. Para el segundo mínimo $|\boldsymbol{r_2}| = 4.45$ m, $\theta = 110.506°$. El tercer mínimo de interferencia, con $r_1 = 4$ m, $|\boldsymbol{r_2}| = 4.75$ m, $\theta = 134.1°$. En el cálculo de los ángulos, se utiliza la ley de los cosenos: $r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos\theta}$.

2.57 *Dos fuentes sonoras* emiten en fase a una frecuencia $f_0 = 170\,\text{Hz}$. Un observador se encuentra en reposo a 8 m de una fuente y a 11 m de la otra. El nivel de intensidad de cada una de las fuentes cuando emiten por separado es 60 dB y 70 dB respectivamente. Calcular el nivel de intensidad que percibe el observador cuando ambas fuentes funcionan simultáneamente.

R. La diferencia de fase debido a la diferencia de recorrido de las ondas que emergen de cada fuente se calcula de la fórmula simple:

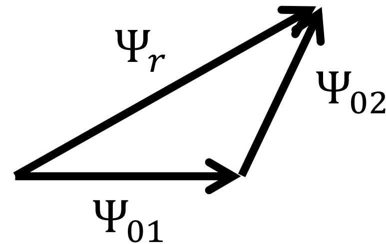
$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{2\pi f_0 \Delta r}{v} = 9.32\ (\text{rad}),$$

con $\Delta r = 3\ \text{m}$ y $v = 344\ \text{m/s}$. La función de onda resultante se calcula desde la relación general según el diagrama de fasores:

$$\Psi_r = \sqrt{\Psi_{01}^2 + \Psi_{02}^2 + 2\Psi_{01}\Psi_{02}\cos(\Delta\varphi)}.$$

$$(\Psi_r)^2 \approx (\Psi_{02} - \Psi_{01})^2.$$

$$\langle I_r \rangle \approx \left(\sqrt{\langle I_{02}\rangle} - \sqrt{\langle I_{01}\rangle}\right)^2.$$



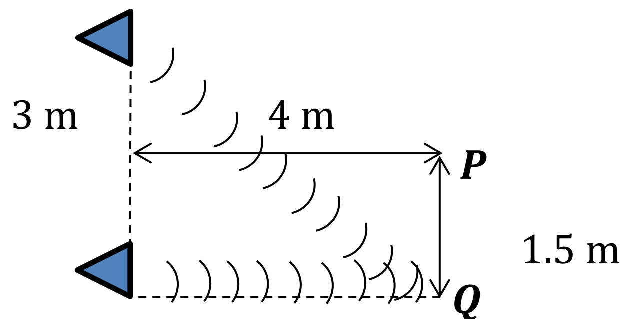
Dado los niveles de intensidad de cada fuente, es posible calcular la intensidad promedio de cada una de ellas:

$$\beta_1 = 60\ \text{Hz},\ \langle I_{01}\rangle = 1.0 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2.$$

$$\beta_2 = 70\ \text{Hz},\ \langle I_{02}\rangle = 1.0 \times 10^{-5}\ \text{W/m}^2.$$

La intensidad resultante es: $\langle I_r\rangle \approx 4.7 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$. Finalmente, el nivel de intensidad resultante se obtiene desde la fórmula logarítmica: $\beta_r = 10\log(\langle I_r\rangle/\langle I_0\rangle) =$ **66.7 dB**.

2.58 *Dos altavoces pequeños* separados por una distancia de 3 m emiten ondas sonoras con frecuencia de 1.04 kHz y con la misma fase. Si cada altavoz produce 4 W de potencia sonora, determine las intensidades promedio en los puntos ***P*** y ***Q***. Asumir $v = 348\ \text{m/s}$.



R. La diferencia de fase de las ondas de *presión* o *desplazamiento* en ***P*** es cero, por lo tanto la onda superpuesta en ***P*** se puede describir como:

$$u(r,t) = u_0\sin(kr_1 - \omega t + \phi_1) + u_0\sin(kr_2 - \omega t + \phi_1),$$

en donde $r_{1,2}$ son las distancias desde las respectivas fuentes. Dado que $r_1 = r_2$, y que la intensidad en $\boldsymbol{P}$ producida por cada parlante es la misma, la onda resultante de desplazamiento molecular es:

$$u(r,t) = 2u_0 \sin(kr - \omega t + \phi).$$

La intensidad promedio de la onda sonora es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda de desplazamiento: $\langle I \rangle \propto (2u_0)^2$, el cual es equivalente a $\langle I \rangle = 4\langle I_0 \rangle$, i.e., la intensidad total en $\boldsymbol{P}$ es igual a cuatro veces la intensidad producida por una fuente. Esta intensidad es la potencia por unidad de área correspondiente a la de una esfera de radio R, con centro en la fuente. Numéricamente:

$$\langle I_0 \rangle = 0.017 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad \boldsymbol{\langle I_P \rangle = 0.0697 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}.$$

En el punto $\boldsymbol{Q}$ las amplitudes de las ondas de desplazamiento son diferentes, y la diferencia de fase $\Delta\phi$ debido a la diferencia de recorrido también. En este caso, utilizamos:

$$\langle I_Q \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\Delta\phi),$$

$$\Delta\phi = k\Delta r = \frac{2\pi f \Delta r}{v}, \quad \Delta r = 1 \text{ m}.$$

Numéricamente: $\boldsymbol{\langle I_Q \rangle = 0.065 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$

2.59 *Amplitud de vibración onda Sonora.* Calcular la amplitud de vibración de una onda sonora con una frecuencia de 8 kHz, si su nivel de intensidad es de 62 dB. Asuma que el aire está a 15 °C y su densidad es 1.29 kg/m³.

R. Calculamos la intensidad de la onda sonora:

$$\beta = 10 \log_{10} \left[\frac{\langle I \rangle}{I_0} \right];$$

$$\langle I \rangle = 1.58 \times 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

La amplitud de presión es: $\langle I \rangle = (\Delta P)_M^2 / 2\rho_0 v$, $(\Delta P)_M = \sqrt{2\rho_0 v \langle I \rangle}$. Con $v = 331.3$ m/s a cero grados centígrados, aproximamos $v = 340.3$ m/s a 15°C. El cambio máximo de presión:

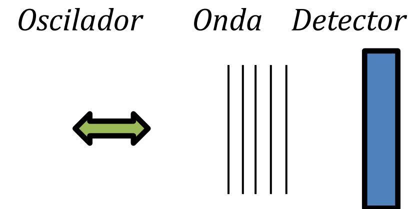
$$(\Delta P)_M = 0.0372 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

La amplitud de vibración puede obtenerse desde el valor de $(\Delta P)_M$: $(\Delta P)_M = Bku_0 = v^2 \rho_0 k u_0$.

$$u_0 = \frac{(\Delta P)_M}{v^2 \rho_0 k}.$$

El vector de onda es: $k = \omega/v = 2\pi f/v = 147.71\ \mathrm{m}^{-1}$, y la amplitud de vibración es: $u_0 = 1.69 \times 10^{-9}\mathrm{m}$. ***La magnitud de la amplitud de oscilación de una onda sonora en el aire es del orden de las distancias atómicas***.

2.60 *Efecto Doppler y M.A.S.* Con el fin de determinar la velocidad de un oscilador armónico, un haz sonoro es enviado a lo largo de la línea de movimiento del oscilador. El sonido, el cual es emitido a una frecuencia de 8000 Hz, se refleja directamente por el oscilador a hacia un sistema detector. El detector registra que el haz reflejado varía en la frecuencia entre los límites de 8003.1 Hz y 7996.9 Hz. Cuál es la máxima velocidad del oscilador? Considere que la velocidad del sonido es igual a 340 m/s.



R. El rango de frecuencias detectadas en el aparato corresponden a las frecuencias de las ondas reflejadas de por el oscilador acercándose y alejándose del detector. Inicialmente, la fuente emisora en reposo emite ondas a $f_0 = 8$ kHz que se reflejan en un objeto que se acercándose o alejándose de la misma. En el caso en que el oscilador se acerca con velocidad v, la frecuencia reflejada es:

$$f_1 = \left(1 + \frac{v}{v_w}\right) f_0,$$

A esta frecuencia se le asocia ahora a la fuente en movimiento estando el detector en reposo. La frecuencia captada por el detector es:

$$f_2 = \frac{f_1}{\left(1 - \frac{v}{v_w}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{v}{v_w}\right)}{\left(1 - \frac{v}{v_w}\right)} f_0.$$

En el caso en que el oscilador se aleja con velocidad v, tendremos, con argumentos similares

$$f_3 = \frac{\left(1 - \frac{v}{v_w}\right)}{\left(1 + \frac{v}{v_w}\right)} f_0.$$

De estas expresiones se puede deducir que $f_3 < f_2$. Reemplazando los valores numéricos, se obtiene el valor de la velocidad máxima del oscilador $v = 0.066$ m/s.

2.61 *Una fuente de sonido* con una frecuencia de 8.46 kHz se mueve en dirección positiva del eje *X*, acercándose a un observador en reposo con una velocidad de 34.8 m/s. (a) Cuál es la **longitud de onda** de la onda sonora que percibe el observador? (b) Qué frecuencia captaría el observador si éste se acerca simultáneamente a la fuente (moviéndose en dirección negativa del eje *X*) con una velocidad de 5.2 m/s? **Considere la velocidad del sonido igual a 348 m/s.**

R. (a) La frecuencia captada por el observador:

$$f_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_f}{v_w}\right)} f_f = \frac{1}{\left(1 - \frac{34.8}{348}\right)} \times 8460 = 9400\ \mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda que percibe el observador es: $\lambda_0 = v/f_0 = 0.037$ m. (b) En el caso en que el observador se acerca simultáneamente a la fuente:

$$f_0 = \left(\frac{1 + \frac{v_0}{v_w}}{1 - \frac{v_f}{v_w}}\right) f_f = 9540.5 \text{ Hz.}$$

2.62 Una onda sonora tiene un nivel de intensidad de 75 dB mientras una segunda onda tiene un nivel de 72 dB. Cuál es el nivel de intensidad cuando los dos sonidos se combinan?.
R. La intensidad de cada una de las ondas puede calcularse como:

$$\langle I \rangle(75\text{dB}) = 0.000032 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \qquad \langle I \rangle(72\text{dB}) = 0.00001585 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

La amplitud de desplazamiento (o el cambio de presión) es proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad de la onda $u \propto \sqrt{\langle I \rangle}$. La amplitud de la onda resultante en el caso en el cual ambas ondas se encuentren en fase es:

$$u_r = u_1 + u_2.$$

La intensidad de la onda resultante puede calcularse desde la expresión:

$$\langle I_r \rangle = \left(\sqrt{\langle I_1 \rangle} + \sqrt{\langle I_2 \rangle}\right)^2 = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle}\sqrt{\langle I_2 \rangle} = 0.00009289 \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

mientras que el nivel de intensidad resultante es $\beta_r = 79.6$ dB. Para ondas en oposición de fase $u_r = u_1 - u_2$ y $\beta_r = 64.3$ dB. Si la emisión de las ondas se produce en forma incoherente, $\langle I \rangle = 0.00004785$ W/ m^2 y $\beta_r = 76.8$ dB.

2.63 *Cuántos niños* deben gritar a razón de 50 dB cada uno (en fase) para producir una sensación sonora de 70 dB?
R. Utilizando el resultado anterior, si N representa el número de niños que generan un nivel de intensidad de 70 dB, entonces la intensidad promedio resultante es

$$\langle I_r \rangle = N^2 \langle I_1 \rangle.$$

El nivel de intensidad resultante 70 dB $= \beta_r = 10 \log_{10}(\langle I_r \rangle / \langle I_0 \rangle)$ ó

$$70 \text{ dB} = \beta_r = 10 \log_{10} N^2 + 50 \text{ dB}.$$

Despejando para N, $10 \log_{10} N^2 = 20$ dB, o $N = 10$.

2.64 Cuántos armónicos de un tubo de 1.5 m de largo abierto en ambos extremos están dentro del rango de audición del oído humano, entre 20 Hz y 20 kHz?.

R. La frecuencia fundamental es $f = v/2L = 116$ Hz. En el límite de audición del oído humano, el número de armónicos posibles a la frecuencia más alta es **172. Este número debe ser el ENTERO más cercano que produzca la frecuencia audible.**

2.65 *En un experimento* para determinar la velocidad del sonido, dos observadores A y B, están estacionados y separados 5 km. Cada uno está equipado con una pistola y un cronómetro. El observador A escucha el reporte de la pistola B 15.5 s después de ver el destello de luz. Después, el observador A dispara su pistola y B escucha su reporte 14.5 s después de ver su destello. Determinar la velocidad del sonido y la componente de la velocidad del viento a lo largo de la línea que une los puntos A y B.
R. Este ejercicio puede resolverse planteando un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas: la velocidad del sonido v_S y la componente horizontal de la velocidad del viento v_w:

Observador B $\quad 5000 = (v_S + v_w)(14.5),$
Observador A $\quad 5000 = (v_S - v_w)(15.5),$

cuyas soluciones son $v_S = 333.7\ \mathrm{m/s}$ y $v_w = 11.1\ \mathrm{m/s}$.

2.66 Calcular la velocidad del sonido de un gas diatómico ideal que tiene una densidad de 3.50 kg/m^3 y está sometido a una presión de 1 atm. (101.3 kPa).

R. Utilizamos el coeficiente adiabático para un gas diatómico $\gamma = 1.4$.

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1.4)(101.3 \times 10^3\ \mathrm{Pa})}{3.50\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 201.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

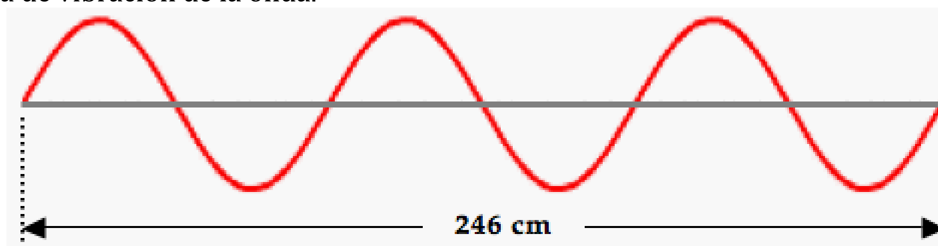
Para el oxígeno diatómico a cero Celsius, $\rho = 1.429\ \mathrm{kg/m^3}$ y a presión atmosférica, $v_{O_2} = 315\ \mathrm{m/s}$.

2.67 *Flauta con extremos abiertos.* Se desea construir una flauta de forma tal que cuando están cubiertos todos los agujeros, ésta emita una nota de 264 Hz. Si la flauta se comporta como un tubo de extremos abiertos, determinar la longitud de la misma.
http://www.superstock.com/results.asp?txtkeys1=Eye%20Ubiquitous



R. Para el modo de vibración fundamental, $L = \lambda/2 = v/2f = 64.4$ cm.

2.68 *Onda Estacionaria.* Se establece un patrón de onda estacionaria en un hilo tenso de 246 cm de longitud. Una fotografía instantánea del hilo en un momento dado se muestra en el diagrama adjunto. Las ondas de vibración viajan a una velocidad de 22 m/s. Determine la frecuencia de vibración de la onda.



R. Es claro que la longitud total del hilo contiene exactamente tres longitudes de onda, $L = 3\lambda$ y $\lambda = 82$ cm. La frecuencia de vibración de la cuerda es: $f = v/\lambda = 26.8$ Hz.

2.69 *Un tubo largo* contiene aire a 1 atm y 77 °C. El tubo está abierto por un extremo y cerrado por el otro por un pistón móvil. Un diapasón cerca del extremo abierto está vibrando a 500 Hz. Se produce resonancia cuando el pistón está a distancias de 18.0, 55.5 y 93 cm del extremo abierto. Calcular la rapidez del sonido en el aire a 77 °C.

R. En un tubo con un extremo abierto, las longitudes de onda de dos armónicos consecutivos están relacionadas con la longitud L del tubo por:

$$L = \frac{m\lambda}{4}, \qquad m = 1,3,5..$$

La diferencia entre las longitudes consecutivas es: $\Delta L = \lambda/2$. Es decir, dos nodos consecutivos en un tubo con un extremo cerrado (dos antinodos en un tubo con extremos abierto) aparecerán cuando su diferencia en la localización sea exactamente igual a media longitud de onda. En este caso: $\Delta L = 37.5$ cm y $\lambda = 75$ cm. A 500 Hz, la velocidad de propagación de la onda en el medio es $v = \lambda f = 375$ m/s. La frecuencia fundamental es la menor frecuencia posible a esta velocidad, la cual corresponde a la mayor longitud del tubo: 0.93 m: $f_1 = v/4L = 100.8$ Hz.

Las frecuencias de resonancia en el tubo están dadas por múltiplos enteros impares de 100 Hz: 100, 300 y 500 Hz. *Nota*: Otra forma de comprobar este resultado es utilizando la fórmula para la velocidad de la onda en función de la temperatura:

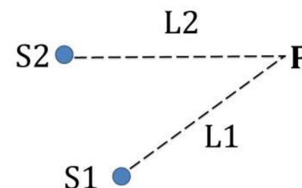
$$v = K\sqrt{T},$$

en donde K es una constante de ajuste referida a la velocidad del sonido en el aire a 0°C (273 K) a condiciones de presión atmosférica: 331 m/s.

2.70 *Velocidad del Sonido, bajo cero.* Calcular la velocidad del sonido en un lugar cuya temperatura es -10°C.

R. Utilizamos la fórmula $v = K\sqrt{T}$, $K = 20.03\ \mathrm{m.s^{-1}.Kelvin^{-1/2}}$, y $T = 263\ K(-10°C)$, $v = 324.83$ m/s

2.71 *Interferencia Constructiva.* En la figura anterior, S_1 y S_2 son fuentes sonoras idénticas y emiten señales simultáneas en fase. Para que valores de la diferencia $L_2 - L_1$ existirá interferencia constructiva y se escuchará un sonido fuerte en el punto P?

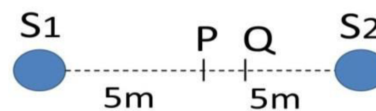


R. Existirá interferencia constructiva cuando la diferencia de fase debido a una diferencia de camino sea un múltiplo entero par de 2π: $\Delta\phi = k(L_2 - L_1) = 2n\pi$. En forma equivalente, si la diferencia de camino $L_2 - L_1$ obedece $L_2 - L_1 = n\lambda$, existirá interferencia constructiva en el punto de observación P.

2.72 *Interferencia Constructiva en Ondas Sonoras.* Las dos fuentes sonoras mostradas en la figura emiten ondas idénticas de longitud de onda de 80 cm, una hacia la otra. Estas fuentes

oscilan en fase. Un detector en el punto **P** se encuentra en la posición de un máximo de intensidad, es decir, un sonido alto. Conforme se mueve de **P** hacia **Q**, el sonido decrece en intensidad. (a) Que tan distante se encuentra el primer mínimo desde el punto **P**?. (b) Qué tan distante de **P** se escuchará un sonido fuerte de nuevo?.

R. (a) El primer mínimo de interferencia estará localizado en:



$$L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2}.$$

Si denotamos la distancia **PQ** como x, entonces $L_2 = 5 + x$, y $L_1 = 5 - x$. Así $2x = \lambda/2$, ó $x = \lambda/4 = 20$ cm. (b) Si tenemos en cuenta que un mínimo está localizado entre dos máximos de intensidad, entonces el siguiente máximo estará localizado a 40 cm desde el punto **P**. Una forma alternativa consiste en considerar que entre $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ existe un patrón de ondas estacionarias con un máximo de interferencia en P. La distancia entre máximos consecutivos es $\lambda/2$ y la distancia entre un máximo y un mínimo consecutivo es $\lambda/4$. Este análisis arroja los mismos resultados anteriores.

2.73 *Diferencia de Fase*. Considere una onda mecánica descrita por la expresión:

$$y(x,t) = 0.5\sin(4\pi t - 2x).$$

Calcular: a) La diferencia de fase entre dos puntos tomados en sentido de la dirección de propagación y que distan entre sí 20 metros en un instante determinado. b) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de un mismo punto correspondiente a dos instantes separados por un intervalo de tiempo de 2 s.
R. a) En un instante de tiempo t, la diferencia de fase es:

$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) = 2(20) = 40 \text{ rad}.$$

b) En un punto fijo x, la diferencia de fase es:

$$\Delta\phi = \omega(t_2 - t_1) = 4\pi(2) = 8\pi \text{ rad}.$$

2.74 *Interferencia Destructiva, tres fuentes.* Tres altavoces, *a, b* y *c* emiten ondas sonoras a la misma frecuencia. Cuando las ondas llegan a un punto ***P*** alejado de los altavoces, los sonidos tienen la misma amplitud pero fases diferentes: $\Psi_a = A\sin(\omega t - 2\pi/3)$, $\Psi_b = A\sin(\omega t)$, $\Psi_c = A\sin(\omega t + 2\pi/3)$. Demostrar que la intensidad del sonido en el punto ***P*** es igual a cero para cualquier instante.
R. El principio de superposición conduce a la expresión general para la onda resultante en *P*:

$$\Psi_r = \Psi_a + \Psi_b + \Psi_c$$

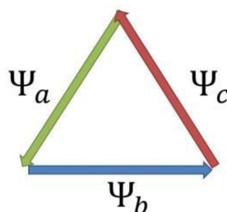
$$\Psi_r = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + A\sin(\omega t) + A\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\Psi_r = 2A\sin(\omega t)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + A\sin(\omega t),$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\Psi_r = \mathbf{0}.$$

La amplitud de la onda resultante (de presión o desplazamiento) es cero en cualquier instante de tiempo. Otra forma de resolver este ejercicio es considerando el diagrama fasorial asociado a las tres ondas de la misma frecuencia y amplitud:



cuya diferencia de fase relativa es 120° y la amplitud resultante es igual a cero.

2.75 *Un alambre* bajo tensión vibra a una frecuencia fundamental de 256 Hz. Cual deberá ser su frecuencia fundamental si el alambre fuese la mitad de largo, el doble de ancho y sometido a un cuarto de su tensión?.
R. La frecuencia fundamental de vibración es: $f_1 = \left(\sqrt{T_1/\mu_1}\right)/2L_1$. Bajo las transformaciones enunciadas, tenemos

$$f_1 = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} \rightarrow\rightarrow \frac{1}{2(\boldsymbol{L_1/2})}\sqrt{\frac{(\boldsymbol{T_1/4})}{(\boldsymbol{4\mu_1})}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{f_1} = \mathbf{128\ Hz}.$$

Nota: La densidad lineal de masa μ escala con la densidad "volumétrica de masa ρ" según la relación:

$$\mu \rightarrow \pi\rho R^2,$$

en donde R es el radio del alambre.

2.76 *Cambio de frecuencia debido a un cambio de temperatura.* En que fracción cambiará la frecuencia fundamental de un tubo de acero de un órgano abierto por ambos extremos, si la temperatura ambiente aumenta de 20 a 25 °C?. Desprecie los cambios en la longitud del tubo debido a efectos de expansión térmica. Sugerencia: La velocidad del aire a temperatura absoluta T (en kelvin) cambia según la ley $v = K\sqrt{T}$, en donde K es una constante. Considere que a cero grados centígrados y a presión atmosférica, $v = 331.3$ m/s.

R. La velocidad del sonido a 20 °C puede calcularse desde la fórmula: $v = K\sqrt{T}$. A 0°C (273 K), la velocidad es 331.3 m/s, por lo tanto la constante de proporcionalidad es: 20.05 m/sK$^{0.5}$. A 20 grados Celsius, tendremos: $v = 20.05 \times \sqrt{293} = 343.2$ m/s, mientras que a 25°C, $v = 20.05 \times \sqrt{298} = 346.1$ m/s. La frecuencia fundamental en un tubo de extremos abiertos es:

$$f = \frac{v}{2L}.$$

A diferentes temperaturas, si consideramos que la longitud del tubo no cambia por efectos de expansión térmica, la relación de frecuencias es:

$$\frac{f'}{f} = \frac{v'/2L}{v/2L} = \frac{v'}{v} = \frac{346.1}{343.2} = 1.0085.$$

La variación porcentual en la frecuencia es del orden de 0.85%, en un incremento de 5°C en la temperatura ambiente.

2.77 *Un altavoz situado* en el suelo dirige el sonido hacia arriba de manera que la intensidad de las ondas es uniforme sobre la superficie de un hemisferio imaginario. Si la potencia de las ondas emitidas por el altavoz es de 12 W, cuál es la intensidad y el nivel de intensidad de las ondas a una distancia de 1.4 m?.
R. La intensidad promedio de las ondas emitidas en un "hemisferio" imaginario de radio 1.4 m es:

$$\langle I \rangle = \frac{P}{2\pi R^2} = 0.97 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

El nivel de intensidad a esta distancia es:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{\langle I \rangle}{I_0}\right) = 119.89 \text{ dB}.$$

2.78 *Un amplificador de sonido* está diseñado para generar una potencia de salida de 150 W a 1 kHz. La potencia de salida disminuye en 10 dB a 15 kHz. Calcular el valor de esta potencia.
R. La diferencia entre los niveles de intensidad de las dos ondas es $\beta_2 - \beta_1 = -10$ dB. La diferencia es igual a:

$$\Delta\beta = 10 \log\left(\frac{\langle I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle}\right),$$

en donde $\langle I_2 \rangle$ es la intensidad promedio a 15 kHz. La relación de intensidades es: $\langle I_2 \rangle / \langle I_1 \rangle = 0.1$. La razón de intensidades es igual a la razón de potencias promedio: $\langle I_2 \rangle / \langle I_1 \rangle = P_2/P_1 = 0.1$, indicando que la potencia a 15 kHz es igual a 15 W.

2.79 *Dos tubos abiertos* de un órgano, sonando al mismo tiempo en su frecuencia fundamental, producen pulsaciones de 11 Hz. El tubo más corto tiene una longitud de 2.40 m. Qué tan largo es el segundo tubo?
R. Una pulsación se produce cuando las dos frecuencias emitidas se aproximan a la diferencia de los armónicos generados por cada una de las fuentes. La frecuencia fundamental en un tubo abierto en ambos extremos es: $f_1 = v/2L_1$. Para dos tubos de diferente longitud,

$$f_2 - f_1 = \frac{v}{2L_2} - \frac{v}{2L_1}.$$

Para $f_2 > f_1$, $L_1 > L_2$. Tomando $v = 343$ m/s en el aire a 20°C, $L_1 = 2.84$ m. Si ambos tubos vibran en el primer sobretono, la longitud del más largo es $L_1 = 2.6$ m.

2.80 *Ajuste de la diferencia de fase.* Dos ondas armónicas $y_1 = A\sin[kx - \omega t + \varphi_1]$, $y_2 = A\sin[kx + \omega t + \varphi_2]$, se combinan para formar una onda estacionaria. Demuestre que si se ajustan el origen de coordenadas y el tiempo inicial, la onda estacionaria se puede escribir como:

$$y = 2A\cos(\omega t')\sin(kx').$$

Determine los valores de t' y x'.

R. Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

obtenemos: $y(x,t) = 2A\sin\left(kx + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)$. Ajustando los valores de la posición inicial y el instante inicial, finalmente:

$$y(x,t) = 2A\cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\omega}\right)\right]\sin\left[k\left(x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2k}\right)\right].$$

Comparando con $y(x',t') = 2A\cos(\omega t')\sin(kx')$. Así:

$$t' = t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\omega}, \quad x' = x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2k}.$$

2.81 *Un sonido de longitud* de onda de 2 m en el aire penetra en el agua en donde se desplaza a una velocidad de 1500 m/s. Cuál es la longitud de onda en el agua?
R. La propiedad física que permanece invariable en este caso es la frecuencia de vibración del medio. La longitud de onda en el agua se obtiene desde la relación simple:

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}\lambda_{aire}}{v_{aire}} = 1500\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{2\text{m}}{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8.8\text{ m}.$$

La longitud de onda de la onda sonora en el agua es de 8.8 m.

2.82 *Energía de una onda estacionaria.* Considere una onda estacionaria con n antinodos en un hilo de longitud L y tensión T. El patrón de onda resultante es:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t),$$

con $k = n\pi/L$. Demostrar que la energía promedio de la onda (obtenida en un número entero de ciclos) es:

$$\langle E\rangle = \frac{\pi^2 T A^2}{L}n^2.$$

Así, para una onda estacionaria con una amplitud dada, la energía de la onda aumenta con el cuadrado del número de antinodos.

R. La energía por unidad de longitud en un hilo tenso se define en general como

$$E' = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

Ahora: $\partial y/\partial t = -2A\omega \sin(kx)\sin(\omega t)$, $\partial y/\partial x = 2Ak\cos(kx)\cos(\omega t)$. Reemplazando en E'

$$E' = 2\mu A^2\omega^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t) + 2TA^2k^2\cos^2(kx)\cos^2(\omega t).$$

Utilizando $T = \mu v^2$ y $kv = \omega$, obtenemos:

$$E' = 2\mu v^2A^2k^2(\sin^2(kx)\sin^2(\omega t) + \cos^2(kx)\cos^2(\omega t)).$$

Promediando en el tiempo, la energía por unidad de longitud resulta: $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \langle\cos^2(\omega t)\rangle = 1/2$

$$\langle E'\rangle = \mu v^2A^2k^2(\sin^2(kx) + \cos^2(kx)) = TA^2k^2.$$

En términos del número de antinodos,

$$\langle E'\rangle = \frac{\pi^2TA^2}{L^2}n^2.$$

La energía total se obtiene multiplicando $\langle E\rangle = \langle E'\rangle L$:

$$\langle E\rangle = \frac{\pi^2TA^2}{L}n^2.$$

2.83 *Distancia de impacto de un rayo.* Con el fin de encontrar que tan lejos la descarga de un rayo de una tormenta ha impactado la superficie terrestre, la siguiente regla empírica es usualmente utilizada: *Divida el tiempo en segundos entre el relámpago y el sonido escuchado por tres. El resultado es igual la distancia en kilómetros al sitio de impacto del rayo.* Justificar esta afirmación.

R. La velocidad del sonido es aproximadamente 333 m/s ó **1/3** km/s. La distancia al sitio de impacto en kilómetros es:

$$s = vt \approx \frac{t}{3},$$

en donde t, el tiempo de viaje del sonido, en segundos. La luz desde el relámpago viaja tan rápido que se considera en esta aproximación que el observador lo capta instantáneamente. Por lo tanto t es esencialmente el tiempo entre el relámpago y el sonido del trueno. La regla se cumple.

2.84 *Velocidad del sonido en el aire.* Demostrar que la velocidad del sonido en el aire aumenta en 0.61 m/s por cada 1°C de incremento en la temperatura.

R. La velocidad de propagación del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura del medio $v\sim\sqrt{T}$. Se cumple entonces que a diferentes temperaturas:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

A cero grados centígrados, la velocidad del sonido es 331 m/s, mientras que si la temperatura aumenta en un grado, tendremos:

$$v_2 = v_1\sqrt{T_2/T_1} = 331\sqrt{\frac{274}{273}} = 331.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

El incremento de la velocidad por cada grado centígrado es $v_2 - v_1 = 0.61$ m/s. A una temperatura de 23 °C, la velocidad del sonido es:
$v_{23°C} = v_{0°C} + 0.61 \times 23 = 345$ m/s.

2.85 *Clamped Bar. Una barra metálica de* 6.0 metros de longitud está aislada en su centro y vibra longitudinalmente de tal forma que presenta resonancia en su primer sobre tono cuando vibra al unísono con un diapasón de 1200 vibraciones/s. Calcular la velocidad del sonido de las ondas en la barra metálica.
R. El centro de la barra constituye un nodo de vibración de las ondas sonoras longitudinales y los extremos constituyen antinodos. Para el primer sobre tono, la distancia entre el extremo de la barra y el nodo central (3 m) corresponde a 3/4 de longitud de onda, es decir $\lambda = 4$ m. La velocidad de propagación de la onda sonora es $v = \lambda f = 4.8$ km/s.

2.86 *Velocidad del sonido en el Dióxido de Carbono*. Determine la velocidad del sonido en CO_2 ($M = 44$ kg/kmol, $\gamma = 1.30$) a una presión de 0.5 atm y a una temperatura de 400 ^{0}C.
R. Utilizamos la fórmula: (1 atm =101,325 Pa)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.3\left(8314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmol\cdot K}}\right)(673.15\mathrm{K})}{44\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}}} = 406.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2.87 *Alambres de Acero y Plata* del mismo diámetro y de la misma longitud están estirados con igual tensión. Sus densidades son 7.8 g/cc y 10.6 g/cc respectivamente. Cuál es la frecuencia fundamental vibración del alambre de plata si la frecuencia fundamental del alambre de acero es de 200 Hz?
R. La fórmula para la frecuencia fundamental en un alambre con extremos fijos es:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Si la tensión y la longitud son iguales en ambos casos, entonces la relación μf^2 permanece constante. La densidad lineal de masa escala como la densidad de volumen según $\mu \to \pi\rho R^2$, con R como el radio de la sección transversal del alambre, también constante en ambos casos en este problema. La relación $\rho f^2 = constante$ nos proporciona la incógnita requerida:

$$\rho_{acero} f_{acero}^2 = \rho_{plata} f_{plata}^2,$$

con: $f_{plata} = f_{acero}\sqrt{\rho_{acero}/\rho_{plata}} = 171.56$ Hz.

2.88 *Oscilaciones Transversales en una barra de acero*. Estimar la relación de las velocidades de propagación longitudinal y transversal para una barra de acero con módulo de Young $\boldsymbol{Y}$ y módulo de corte (o rigidez) igual a $\boldsymbol{G}$.
R. Para la velocidad de propagación longitudinal:

$$v_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}},$$

en donde ρ es la densidad volumétrica de masa. Para la velocidad de propagación de la onda transversal, tendremos:

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

La relación entre estos dos valores es:

$$\frac{v_l}{v_t} = \sqrt{\frac{Y}{G}}.$$

Para el acero, $Y \sim 20 \times 10^{10}$ N/m², $G \sim 80 \times 10^{9}$ N/m². Por lo tanto:

$$\frac{v_l}{v_t} = 1.6.$$

Este resultado puede también aproximarse si consideramos la relación entre el módulo de Young y el módulo de corte para materiales lineales, isótropos y homogéneos en términos del coeficiente de Poisson ν: http://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_Poisson

$$G = \frac{Y}{2(1+\nu)}.$$

Para el acero $\nu \sim 0.3$, entonces $G = Y/2.6$. Dado que $\sqrt{2.6} = 1.61$, entonces es posible obtener de forma indirecta la relación entre las velocidades de las ondas en una barra de acero homogénea.

2.89* *Ondas elásticas en un medio homogéneo.* Considere la ecuación de onda:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u},$$

con λ y μ como constantes positivas. Asumir que en el medio se propaga una onda plana en la dirección positiva del eje X en un medio homogéneo que ocupa todo el espacio. Hallar la velocidad de propagación de la onda cuando el movimiento de la partícula está en la dirección X, la dirección Y y la dirección Z.
R. La solución de prueba debe escribirse en este caso como:

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \boldsymbol{u_0} e^{i(kx-\omega t)}.$$

El cálculo de $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ da como resultado:

$$iku_{0x}e^{i(kx-\omega t)},$$

y $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ conduce a:

$$-k^2u_{0x}e^{i(kx-\omega t)}\boldsymbol{U_X}.$$

Si el movimiento de la partícula es en dirección X, entonces se cumple:

$$-\omega^2\rho=-(\lambda+2\mu)k^2.$$

La velocidad de las partículas en dirección X es:

$$v^{(X)}=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}}.$$

Un tratamiento similar sobre las direcciones Y y Z conduce a $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0$, y por lo tanto la velocidad de propagación de la onda es:

$$v^{(Y,Z)}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

En donde el término asociado a la contribución λ no aporta a la velocidad de fase.

2.90 *Un buzo* está suspendido bajo la superficie del *Loch Ness* por un cable de 100 m unido a un bote en la superficie. El buzo y su traje tienen una masa total de 120 kg y un volumen de 0.0800 m^3. El cable tiene un diámetro de 2.0 cm y una densidad de masa lineal $\mu=1.10$ kg/m. El buzo cree ver algo que se mueve en las profundidades y tira del extremo del cable horizontalmente para enviar ondas transversales por el cable como señal para sus compañeros que están en el bote. a) Calcule la tensión en el punto donde está unido al buzo. Incluir la fuerza de flotación del agua, con $\rho=1000\,\text{kg/m}^3$. b) Calcule la tensión en el cable a una distancia x por arriba del buzo, incluyendo la fuerza de flotación sobre el cable. c) Obtener el tiempo requerido para que la primera señal llegue a la superficie.



http://www.elsalvador.com/hablemos/2005/100405/fotos/buzo8.jpg

R. a) Considerando la fuerza de empuje que actúa sobre una sección de longitud x desde el punto en donde se acopla el buzo, el peso aparente del cable (que es equivalente en este caso a la tensión del mismo **en ese punto**) es:

$$W'=g\left(\mu-\frac{\pi\rho d^2}{4}\right)x,$$

en donde d corresponde al diámetro. En el punto en donde se sujeta el buzo $W'=0$ N. Con un argumento similar, el peso aparente del buzo, o la tensión medida en el punto de sujeción es

392 N (1176 N- 784 N), en donde **784 N** corresponde a la fuerza de empuje del agua: $1000 \times 9.8 \times 0.08$ **N**. b) La tensión en un punto x por encima del buzo es:

$$T(x) = 392 + 7.74x,$$

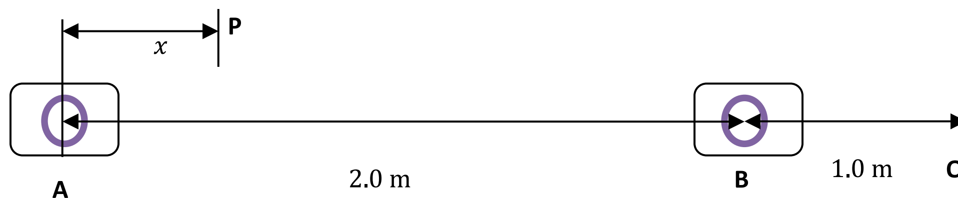
obtenida como la combinación de los pesos aparentes. El peso aparente medido desde la superficie del agua del sistema cable-buzo es de: **1166 N**.

c) El tiempo requerido para que un pulso transversal alcance la superficie del agua se obtiene integrando la relación para la velocidad de propagación de las ondas en una cuerda sometida a una tensión T:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{dx}{dt},$$

$$t = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{\frac{T(x)}{\mu}}} = \int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt{\frac{(392 + 7.74x)}{1.10}}} = \mathbf{3.88\ seg}.$$

2.91 *Interferencia en un sistema de Sonido.* Dos altavoces, **A** y **B** son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas armónicas en fase. **B** está 2.0 m a la derecha de **A**. La frecuencia de las ondas sonoras producidas por los altavoces es de 700 Hz, y su rapidez en el aire es de 344 m/s. Considere el punto **P** entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, a una distancia x a la derecha de **A**. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente del altavoz a **P**. a) Para qué valores de x ocurrirá interferencia destructiva en **P**? b) constructiva?. Considere el punto **Q** a lo largo de la extensión de la línea que une los altavoces, a 1.0 m a la derecha de **B**. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente desde el altavoz a **Q**. c) Para qué frecuencias audibles (20-20,000 Hz) ocurrirá interferencia constructiva en **Q**?



R. En el punto **P** convergen dos ondas sonoras que viajan en direcciones contrarias. Existe interferencia constructiva (o destructiva) dependiendo de cómo sean las diferencias de recorrido de las ondas sonoras en el punto de referencia. Esta diferencia es:

$$\Delta r = x - (d - x) = 2x - d,$$

con d como la distancia entre altavoces.

a) La interferencia destructiva en **P** aparece cuando se cumpla la relación $k\Delta r = m\pi$, con m como número (entero) impar. Por lo tanto:
$2\pi f(2x - d)/v = m\pi$. El primer mínimo de interferencia ocurre para $x = 1.12$ m, mientras que el primer máximo de interferencia constructiva aparece en la posición $2\pi f(2x - d)/v = 2\pi,\ x = 1.25$ m. La distancia entre nodo y antinodo consecutivos en

el patrón de ondas estacionarias es $\lambda/4$, con $\lambda = v/f = 0.49$ m, $\lambda/4 = 0.123$. Así, $1.12 + 0.123$ m $= 1.25$ m, el cual corresponde a la posición del primer máximo de interferencia.

b) Las frecuencias asociadas a la interferencia constructiva están dadas por:

$$\frac{2\pi f(2)}{v} = 2\pi n, \quad f = 172n,$$

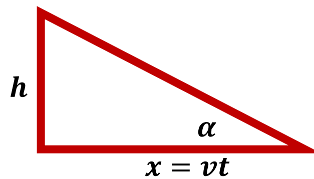
siendo la diferencia de recorrido $\Delta r = 2$, y n un entero positivo.

2.92 *Ondas de choque.* Un jet vuela por encima de nosotros a $\mathbf{M} = 2.50$ y altura constante de 1200 m. a) Qué ángulo tiene el cono de la onda de choque? b) Cuánto tiempo después de pasar el avión directamente por encima nuestro escucharíamos el estruendo sónico?. Ignorar la variación de la rapidez del sonido con la altura.

R. a) Una fuente de sonido que se mueve con una rapidez v_S mayor que la rapidez del sonido v crea una onda de choque. El frente de onda forma un ángulo dado por:

$$\alpha = \arcsin(v/v_S) = \arcsin(1/\mathbf{M}) = 23.58°.$$

b) El cono de la onda de choque formado por el jet se ilustra en la tercera figura de la derecha de la imagen anterior. El tiempo que tarda el frente de onda en alcanzar la posición de referencia (inicialmente justo por debajo de nuestro) es calculado después de una relación trigonométrica simple:



$$t = \frac{h}{v\tan\alpha} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\frac{h}{v_S \tan\alpha}\right),$$

en donde h es la altura y v la velocidad del jet. Numéricamente, $\boldsymbol{t = 3.2}$**s.**

2.93 *Un pato* nadando chapotea el agua una vez cada 1.6 s, produciendo ondas superficiales con esa frecuencia. El pato se mueve con rapidez constante en un estanque en el que la rapidez de las olas superficiales es de 0.40 m/s, y las crestas de las olas por delante del pato están espaciadas 0.18 m. A) qué rapidez tiene el pato?. B) que espaciado tienen las crestas detrás del pato?.
http://artandperception.com/wp-content/uploads/2009/03/duck1.jpg



R. a) Las longitudes de onda por delante de una fuente móvil tienden a reducirse y están dadas por la expresión (tomada de la fórmula general del efecto Doppler):

$$\lambda = \frac{v - v_S}{f_S},$$

en donde v es la velocidad de las ondas de agua y v_S corresponde a la velocidad de la fuente. Reemplazando y despejando v_S:

$$0.18 = \frac{0.40 - v_S}{1/1.6}, \quad v_S = 0.29 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Las longitudes de onda por detrás del pato se obtienen de la expresión:

$$\lambda' = \frac{v + v_S}{v_S} = 1.1 \text{ m}.$$

PR 2.7. Una onda estacionaria de 1100 Hz en una columna de metano (CH_4) a 20°C producen nodos separados por 0.2 m. Calcular la relación γ de las capacidades caloríficas a presión constante y volumen constante del metano. Masa molecular del metano: 16 g/mol.

R. La velocidad de propagación de una onda en un gas en términos de γ, su masa molecular M, la temperatura T y de la constante R se define por:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

La distancia entre nodos consecutivos es $\lambda/2 = 0.2$ m, $\lambda f = v = 0.4 \times 1100 = 440$ m/s. El valor de γ se calcula directamente desde

$$\gamma = \frac{Mv^2}{RT} = \frac{16 \times 10^{-3}\text{kg/mol} \times 440^2\text{m}^2/s^2}{8.315 \text{ J/molK} \times 293 \text{ K}} = 1.3.$$

El valor reportado a 300 K es 1.299. Ver por ejemplo Tabla A2. Termodinámica. Y. A. Çengel, M. A. Boles. Séptima Ed. (2012).

PR 2.8. Una onda plana y armónica que oscila en el aire con una amplitud de 1 μm tiene una intensidad de 100 dB. Cuál es la frecuencia de esta onda?.

R. La intensidad promedio de la onda es:

$$\langle I \rangle = I_0 10^{0.1\beta} = 0.01 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

La amplitud del desplazamiento de las partículas de aire en términos de la intensidad promedio y la frecuencia es (Ver Ejercicio **2.13**):

$$u_0 = \sqrt{\frac{2\langle I \rangle}{v\rho_0}} \times \frac{1}{\omega}.$$

Con los datos suministrados, la frecuencia toma el valor $f = \omega/2\pi = 1114.3$ Hz, con $v = 340$ m/s y $\rho_0 = 1.2$ kg/m^3.

2.94 *Un jet comercial* viaja a una altitud de 11 km con una rapidez de 850 km/h, igual a 0.8 veces la velocidad del sonido a esa altura (es decir, a **Mach 0.8**). Qué temperatura tiene aire a esa altura?
R. Utilizamos:

$$v = \boldsymbol{M}\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

μ- como la masa molecular media del aire, 28.8×10^{-3} kg/mol, y $\gamma = 1.4$, R=8.315 J/molK Despejando T= 215.5 K (-57.5 °C).

2.95 *Considere dos observadores,* separados 100 km a lo largo del eje X miden la diferencia entre los tiempos de llegada de las ondas **S** y **P** de un terremoto hipotético. El primer observador, más cercano al epicentro, mide en su sismógrafo una diferencia de tiempo de llegada de $\Delta t_{sp} = 4.5$ s. El segundo observador mide en su sismógrafo una diferencia de $\Delta t_{sp} = 5$ s. Asumir que el epicentro ha ocurrido en sobre una línea recta entre los dos observadores. Hallar la distancia desde el epicentro al primer observador. Hallar la velocidad de la onda tipo **P** suponiendo una relación de Poisson de 0.25.

R. Sea x la distancia entre el primer observador y el epicentro. En este caso:

$$\Delta t_{sp} = \frac{x}{v_S} - \frac{x}{v_P} = 4.5\ s,$$

dado que $v_S < v_P$. El segundo observador está localizado a una distancia $100 - x$ desde el epicentro:

$$\Delta t_{sp} = \frac{100 - x}{v_S} - \frac{100 - x}{v_P} = 5\text{ s.}$$

Resolviendo para x, obtenemos: $x = 47.4$ km. Si la relación de Poisson es de 0.25, entonces:

$$\nu = 0.25 = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

o de forma equivalente $\lambda = \mu$. La relación entre las velocidades de las ondas **P** y **S** se obtienen desde la expresión general:

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{3}.$$

Reemplazando en cualquiera de las expresiones anteriores, finalmente se calcula el valor numérico de $v_P = 25$ km/s, mientras que la velocidad de las ondas tipo **S** es aproximadamente igual a $v_S = 14.4$ km/s.

PR 2.9. Dos altavoces separados una cierta distancia emiten sonidos de una misma frecuencia. En un punto determinado ***P*** la intensidad debida a cada altavoz por separado es I_0. La distancia desde ***P*** a uno de los altavoces es $\lambda/2$ mayor que la de ***P*** al otro. Cuál es la intensidad en ***P*** si (a) los altavoces son coherentes y están en fase?. (b) Son incoherentes? (c) Son coherentes pero tienen una diferencia de fase de π rad?.

R. (a) La intensidad resultante en ***P*** depende de la diferencia de recorrido de cada onda (Ver Ejercicio **2.58**):

$$I_P = 2I_0|1 + \cos(\Delta\phi)|.$$

Si la diferencia de recorrido es $\lambda/2$, $\Delta\phi = \pi$, $I_P = 0$ [Interferencia destructiva]. (c) Para el caso de ondas incoherentes, la intensidad en ***P*** es simplemente la suma de las contribuciones de las ondas aisladas: $I_P = 2I_0$. (c) En el caso de dos ondas coherentes, la diferencia de fase cambia por

$$\Delta\phi = k\Delta r + \pi = 2\pi,$$

y la intensidad en ***P*** es $I_P = 4I_0$. La máxima intensidad posible para este sistema también se obtiene desplazando ***P*** una distancia equidistante la fuente mientras éstas operan en fase.

2.96 **Dispersión.* Demostrar que la ecuación de onda [Ecuación de Schrödinger]

$$im\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

tiene soluciones de onda viajera de la forma

$$y(x,t) = fe^{i(kx-\omega t)},$$

y determine la relación de dispersión entre los parámetros k y ω.
R. Claramente, la función $y(x,t)$ constituye una solución de la ecuación anterior si se satisface

$$\omega = \frac{k^2}{m},$$

es decir, la relación de dispersión es de carácter cuadrático.

2.97 *Propagación de ondas en arterias.* La velocidad de las ondas del pulso arterial (*Pulse Wave Velocity* **PWV**) es una medida de la rigidez de las paredes arteriales. Esta cantidad es fácilmente medible en humanos, altamente reproducible y posee una alta correlación con eventos de mortalidad debido a causas cardiovasculares; además es reconocida por la *Sociedad Europea de la Hipertensión* como parte integral del diagnóstico y tratamiento de esta condición. Examinaremos el flujo pulsante de la sangre en una arteria con paredes delgadas y elásticas. En un primer ejercicio asumamos que existen solo pulsaciones pero no existe flujo neto. Debido al gradiente de presión en la sangre, las paredes arteriales tienden a deformarse. La fuerza de restauración elástica en las paredes hace posible la propagación de las ondas. La arteria de radio $a(x,t)$ varía desde un valor constante promedio a_0 en el tiempo y a lo largo del eje de la arteria (x). Sea el área de la sección transversal $S = \pi a^2$, y la velocidad promedio $u(x,t)$. Considere un volumen geométrico fijo entre x y dx, a través del cual el fluido se mueve entrando y saliendo del mismo. La conservación de la masa requiere:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (uS)}{\partial x} = 0.$$

El balance del cambio en el *momentum*:

$$\frac{\partial (\rho u S)}{\partial t}$$

El cambio neto del *momentum* que ingresa al volumen es:

$$-\frac{\partial (\rho u^2 S)}{\partial x} dx$$

La fuerza neta debido a la presión en los dos extremos es:

$$-\frac{\partial (pS)}{\partial x} = -S\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial S}{\partial x},$$

mientras que sobre las paredes laterales

$$p\frac{\partial S}{\partial x} = 2\pi a p \frac{\partial a}{\partial x}$$

Combinando las anteriores expresiones, obtenemos:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (*)$$

Supongamos que la presión por fuera de la arteria es constante e igual a cero. El cambio en el radio de la arteria debe ser causado por el cambio en la presión sanguínea. La deformación elástica debido al incremento de la circunferencia es da/a. Sea h el espesor en la arteria, mucho menor que a, y E el módulo de Young. El cambio en la fuerza elástica es $2Ehda/a$ el cual debe balancearse a la fuerza debida al cambio de presión $2adp$:

$$\frac{2Ehda}{a} = 2adp,$$

el cual implica

$$\frac{dp}{da} = \frac{Eh}{a^2},$$

o

$$\frac{dp}{dS} = \frac{\sqrt{\pi}Eh}{S^{3/2}}.$$

La presión se incrementa con el radio del tubo, pero la razón del incremento es menor para radios más grandes. Bajo integración, obtenemos la ecuación de estado:

$$p - p_0 = -\frac{Eh}{a} = -\frac{\sqrt{\pi}Eh}{\sqrt{S}}$$

La ecuación (*) puede escribirse ahora como:

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{S}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=c^2\frac{\partial S}{\partial x},$$

con S definido por:

$$c=\sqrt{\frac{Eh}{2\rho a}},$$

la cual tiene unidades de velocidad. Esta última expresión también se conoce como la ecuación de Moens-Korteweg. Esta ecuación establece que la velocidad de las ondas de pulsación es proporcional a la raíz cuadrada del módulo elástico incremental de la pared vascular con una relación constante del espesor de la pared h a su radio a.

2.98 *Estimativo Numérico de la Escala de Richter.* (a) A una profundidad de 1,000 km bajo la superficie terrestre, las ondas **S** viajan con una velocidad cercana de 6,400 m/s. Que longitud de onda tiene una onda **S** cuyo periodo de oscilación es de 2 s? (b) Se utiliza la escala de magnitud Richter para medir la fuerza destructora de los terremotos. La magnitud Richter m es un número puro, definido como

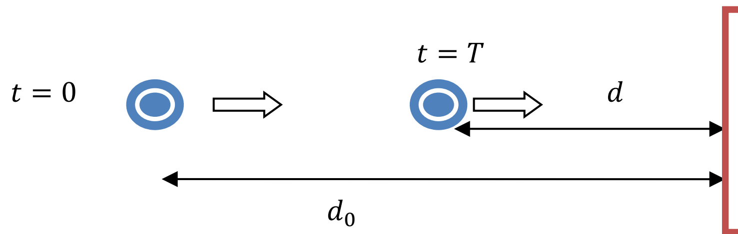
$$m=\log\left(\frac{A}{T}\right)+B,$$

en donde A es la amplitud de la onda en micras medida por un sismógrafo, B es un factor empírico que depende de la distancia del epicentro del terremoto al sismógrafo, log(::) es el logaritmo en base 10 de la cantidad (::), y T es el periodo de las oscilaciones en segundos. Calcule la magnitud Richter del terremoto que causa una onda sísmica del apartado (a) si un sismómetro detecta oscilaciones con $A=10\ \mu\text{m}$. A esta distancia, $B=6.8$. Los daños apreciables comienzan con $m=5$ y el terremoto más fuerte medido a la fecha corresponde a $m=9.5$, en mayo 22 de 1960, Valdivia (Chile).
R. (a) Un estimativo de la longitud de onda se obtiene desde

$$\lambda=vT=12.8\text{ km}.$$

(b) Reemplazando en la expresión anterior $m=\log(10/2)+6.8=7.5$.

2.99 *Una fuente sonora* que se mueve con rapidez constante u se dirige perpendicularmente hacia una pared. En $t=0$ emite ondas de frecuencia f_0 y la distancia entre la fuente y la pared es d_0. Después de un tiempo T la fuente recibe el eco con una frecuencia f_R. Deducir a) Una expresión para u en términos de f_0, f_R y la rapidez del sonido en el aire v_W, b)una expresión para d en términos de f_0, f_R, u y T.



R. a) Utilizamos la fórmula general de la frecuencia de Doppler en dos circunstancias. La frecuencia del eco f_R recibida por la fuente, después de reflejarse en la pared es:

$$f_R = \frac{\left(1 + \frac{u}{v_W}\right)}{\left(1 - \frac{u}{v_W}\right)} f_0.$$

La velocidad de la fuente en términos de las frecuencias f_0 y f_R ($f_R > f_0$):

$$\frac{u}{v_W} = \frac{\left(\frac{f_R}{f_0} - 1\right)}{\left(\frac{f_R}{f_0} + 1\right)}.$$

b) La expresión para la distancia d es:

$$d_0 - d = uT.$$

2.100 *Onda Transversal en un segmento.* Cuando se propaga una onda transversal senoidal en un hilo, las partículas están en Movimiento Armónico Simple. Este es el mismo movimiento que tiene una masa m unida a un resorte ideal con constante de fuerza K' cuya frecuencia angular de oscilación es $\omega = \sqrt{K'/m}$. Considere un hilo con tensión F y masa por unidad de longitud μ por el cual se propaga una onda senoidal con amplitud A y longitud de onda λ. (a) Calcule la constante de fuerza K' de la fuerza de restitución que actúa sobre un segmento corto del hilo con longitud Δx, ($\Delta x \ll \lambda$).
R. Partimos de la expresión general para el movimiento transversal de los segmentos de un hilo tenso con tensión F.

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Para una onda senoidal se cumple $\partial^2 y/\partial x^2 = -k^2 y$, entonces:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{k^2 F}{\mu} y = -\frac{4\pi^2 F}{\mu \lambda^2} y,$$

el cual corresponde a una ecuación de M.A.S para un punto localizado en una posición fija x sobre el hilo. La frecuencia de vibración del segmento es aproximadamente igual a:

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

La constante de restitución es $K' = \omega^2 \mu \Delta x = 4\pi^2 F \Delta x/\lambda^2$.

PR 2.10. Un estudiante camina en un pasillo largo y cerrado en un extremo mientras toca un diapasón que vibra a 512 Hz. Las ondas que se reflejan desde el pasillo producen batidos (pulsaciones) de 4 Hz. Con qué rapidez camina el estudiante?.
R. Utilizamos fórmula Doppler. Un observador en reposo al final del pasillo detectará una frecuencia:

$$f = \frac{1}{1 - \frac{v_e}{v_w}} f_0,$$

con v_e como la velocidad del estudiante, mientras que la frecuencia de la onda reflejada que captará el observador en movimiento es:

$$f' = \left(1 + \frac{v_e}{v_w}\right) f = \frac{\left(1 + \frac{v_e}{v_w}\right)}{\left(1 - \frac{v_e}{v_w}\right)} f_0.$$

La pulsación se define como la diferencia de las frecuencias f' y f_0:

$$|f' - f_0| = \Delta f = 4 \text{ Hz}.$$

Despejando,

$$v_e = v_w \left(\frac{\Delta f}{2f_0 + \Delta f}\right) = 1.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

PR 2.11. Un parlante emite un sonido a un nivel tal que a una distancia particular desde el parlante el nivel de intensidad es de 100 dB. Cuántos parlantes adicionales, localizados en la misma posición, se requieren para que el nivel de intensidad alcance los 120 dB a la misma distancia del parlante?.

R. Si los parlantes emiten sonidos en fase, la intensidad resultante de N fuentes sonoras idénticas es: $\langle I_N \rangle = N^2 \langle I_1 \rangle$. El nivel de intensidad de N fuentes se define como:

$$\beta_N = 120 = 10 \log\left(\frac{\langle I_N \rangle}{I_0}\right) = 10 \log N^2 + 10 \log\left(\frac{\langle I_1 \rangle}{I_0}\right) = 10 \log N^2 + 100.$$

La ecuación resultante toma la forma:

$$20 = 10 \log N^2 \quad \text{ó} \quad N = 10.$$

Si las fuentes emiten sonidos que no están en fase, la intensidad resultante es $\langle I_N \rangle = N \langle I_1 \rangle$, y $N = 100$.

PR 2.12. Demostrar que la superposición de dos ondas $y_1(t) = A \sin(\omega_1 t)$ y $y_2(t) = A \sin(\omega_2 t)$ produce una onda con una frecuencia que es el promedio de las frecuencias de $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

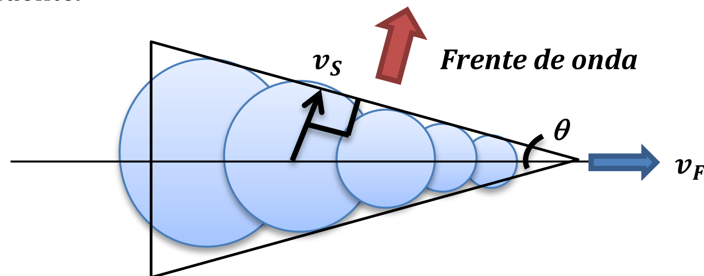
R. La superposición de las dos ondas conduce a:

$$y_R(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

La onda resultante posee una frecuencia $(\omega_1 + \omega_2)/2$, el cual es el promedio de la frecuencia de las frecuencias asociadas a $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

PR 2.13. Una bala posee una velocidad de 600 m/s en el aire. Cuál es el ángulo del cono de la onda de choque?.

R. Si un objeto viaja a una velocidad en un medio cuyo valor es mayor que la velocidad del sonido en ese medio, el resultado es la aparición de una onda de choque cuyo frente de onda estará limitado por un cono que forma un ángulo θ con respecto a la dirección del vector velocidad de la fuente.



En la figura anterior, con $\boldsymbol{v_F}$ como la velocidad de la fuente y $\boldsymbol{v_S}$ como la velocidad del sonido, el cono formado entre la línea del frente de onda y la velocidad de la fuente posee un ángulo definido por (teniendo en cuenta que la línea del frente de onda y $\boldsymbol{v_S}$ forman un ángulo recto):

$$\sin\theta = \frac{v_S}{v_F}.$$

$\theta = 35°$ tomando $v_S = 345$ m/s. El número Mach se define como la razón $\boldsymbol{M} = v_F/v_S$. En este caso $\boldsymbol{M} = 1.74$.

PR 2.14. Una cuerda fija en ambos extremos vibra en una frecuencia fundamental de 220 Hz. Si la cuerda tuviese la mitad de su longitud, con nueve veces su tensión y el doble de su densidad de masa, cuál sería la nueva frecuencia fundamental?

R. La frecuencia del modo fundamental de una onda estacionaria en una cuerda es:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La nueva frecuencia fundamental, con los cambios enunciados, es:

$$f_1' = \frac{1}{2\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{9T}{2\mu}} = 3\sqrt{2}f_1 = 933.4 \text{ Hz}.$$

2.101 *Concepto de Impedancia.* La relación entre la fuerza y los aspectos cinemáticos de las ondas que se propagan en un medio elástico se denomina *impedancia*. Para una onda que se propaga en un medio unidimensional infinitamente extendido, bajo los efectos de una fuerza de compresión

$$F = -SE\frac{\partial u}{\partial x}.$$

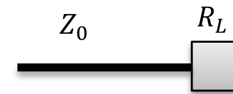
El campo de deformación se propaga según $u(x,t) = \breve{A}e^{i(\omega t - kx)}$, en donde la amplitud de las deformaciones $\breve{A} = F_0/iSEk$, con F_0 como la amplitud de la fuerza ejercida en el medio. Por definición, la impedancia del medio es:

$$\breve{Z} = \frac{F}{\frac{\partial u}{\partial t}} = S\sqrt{E\rho_0},$$

Mientras que la potencia promedio transferida puede definirse en términos de la impedancia del medio:

$$\langle p \rangle = \frac{F_0^2}{2\breve{Z}}.$$

2.102 *Barra acoplada a un reservorio o carga resistiva.* Un método utilizado para atenuar las vibraciones de una barra corresponde al acople de una carga R_L (*dashpot*) con impedancia igual a la impedancia intrínseca de la barra Z_0, en uno de sus extremos, como se ilustra en el diagrama.



En este ejemplo demostraremos que si se cumple esta condición, las ondas incidentes sobre la carga son completamente absorbidas y ninguna onda es reflejada. Considere una onda que se propaga en la barra según la expresión:

$$u(x,t) = \breve{A}_+e^{i(\omega t - kx)} + \breve{A}_-e^{i(\omega t + kx)},$$

con $\breve{A}_+$ y $\breve{A}_-$ como las amplitudes incidentes y reflejadas respectivamente. La fuerza sobre la barra se calcula como:

$$F = -SE\frac{\partial u}{\partial x} = iSEk\left(\breve{A}_+e^{i(\omega t - kx)} - \breve{A}_-e^{i(\omega t + kx)}\right),$$

mientras que la impedancia de la barra en una posición *x* se calcula como:

$$\breve{Z} = \frac{F}{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{ESk}{\omega}\frac{\left(\breve{A}_+e^{-ikx} - \breve{A}_-e^{ikx}\right)}{\left(\breve{A}_+e^{-ikx} + \breve{A}_-e^{ikx}\right)}.$$

La impedancia de una barra *infinitamente* extendida, denotada por $Z_0 = ESk/\omega$, puede insertarse en la expresión anterior, resultando para una línea de longitud L:

$$\breve{Z}(L) = Z_0\frac{\left(\breve{A}_+e^{-ikL} - \breve{A}_-e^{ikL}\right)}{\left(\breve{A}_+e^{-ikL} + \breve{A}_-e^{ikL}\right)}.$$

El coeficiente de reflexión $\breve{R}$ se define como la relación entre la amplitud de la onda reflejada por la carga y la onda incidente, definida como:

$$\breve{R} = \frac{\breve{A}_{-}e^{ikL}}{\breve{A}_{+}e^{-ikL}},$$

conduce a:

$$\breve{Z}(L) = Z_0\frac{(1-\breve{R})}{(1+\breve{R})}.$$

En forma equivalente:

$$\breve{R} = \frac{Z_0 - \breve{Z}(L)}{Z_0 + \breve{Z}(L)}.$$

Es claro que si la impedancia de la carga coincide con la impedancia de la línea de transmisión Z_0, El coeficiente de reflexión $\breve{R}$ se hace cero, y toda la potencia transportada por la guía en el punto de origen es transferida a la carga distante $\breve{Z}(L)$. La impedancia del sistema guía-carga, vista desde la fuente, puede obtenerse, después de cierta manipulación algebraica como:

$$\breve{Z}(0) = Z_0\frac{\breve{Z}(L) + iZ_0\tan(kL)}{Z_0 + i\breve{Z}(L)\tan(kL)}.$$

2.103 Ondas de Choque.* Hemos asumido a través de todo el capítulo de ondas sonoras que las amplitudes de las ondas son pequeñas, el cual indica que la amplitud de presión es mucho menor que la presión estática del gas. Sin esta restricción, las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas se hacen muy complejas. Por ejemplo, el módulo de compresibilidad volumétrico de un gas $B = \gamma p$, tiene significado únicamente cuando el cambio de presión es pequeño comparado con su presión estática. Cuando la amplitud de presión en una onda sonora se aproxima a la presión estática, nuevos fenómenos no lineales se hacen apreciables. Dado que existe un límite inferior en la presión en un gas ($p = 0$), mientras que no existe un límite superior claramente definido, esperamos una asimetría en los fenómenos asociados con un pulso viajero de alta compresión, comparado con un pulso de considerable rarefacción. En una explosión, por ejemplo, la velocidad del desplazamiento del gas en la región de alta compresibilidad debe ser tan grande que no puede ser despreciable en comparación con la velocidad de onda. Como consecuencia, los cambios en la forma del pulso compresivo cuando éste viaja generan un frente de onda que tiende a convertirse más alargado. No es sorprendente por lo tanto encontrar que un pulso de alta compresión rápidamente forma y mantiene un pulso de onda de choque, el cual se propaga a través del gas con una velocidad considerablemente en exceso comparada con la velocidad *normal* del sonido en un gas. En un pulso de rarefacción de amplitud grande, un estado *inverso* existe, provocando un pulso que se dispersa y se debilita cuando se propaga en dirección opuesta. Ningún frente de onda se desarrolla en este caso. Consideremos lo que sucede a un gas en reposo en un tubo de área transversal S con un pistón moviéndose con una velocidad constante u_p, comenzando desde el reposo en el instante $t = 0$. El tubo está lleno inicialmente con un gas de presión p_0, densidad ρ_0, y energía interna por unidad de masa E_0, correspondiente a una temperatura T_0. El gas tiene una relación de calor específico γ y una velocidad del sonido normal definida por:

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

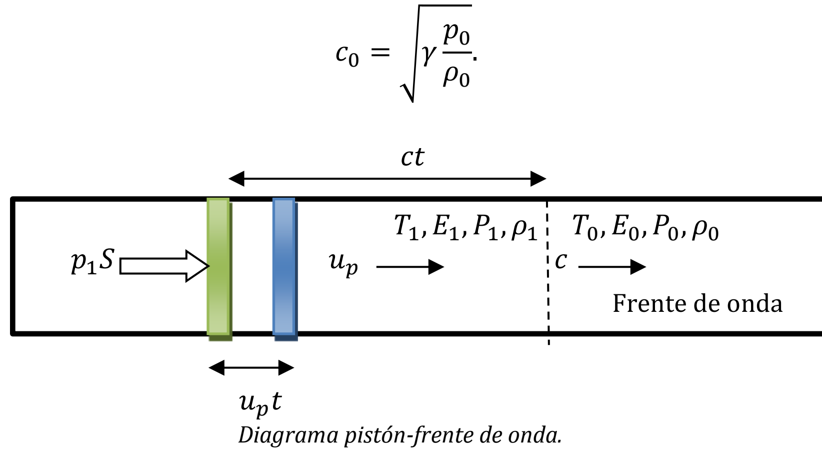


Diagrama pistón-frente de onda.

Denotaremos como c para la velocidad del frente de onda que viaja por el tubo cuando el pistón se le imprime espontáneamente una velocidad u_p. La conservación de la masa implica que:

$$\rho_0 ctS = \rho_1 (c - u_p) tS,$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{c}{c - u_p}.$$

Cuando el pistón se ha movido una distancia $u_p t$, la onda choque se ha movido una distancia ct. La presión en el gas detrás del pistón del frente de la onda de choque se incrementado desde p_0 a un nuevo valor p_1 y con un cambio de densidad desde ρ_0 a ρ_1. El gas entre el pistón y el frente de onda se mueve como una unidad con una velocidad u_p del pistón. El gas comprimido ha sido calentado desde su temperatura original T_0 a una nueva temperatura T_1, con su energía interna por unidad de masa aumentando desde E_0 hasta E_1. Aplicamos la segunda ley de Newton al gas entre el pistón y el frente de onda. En un tiempo t el gas contiene una masa $\rho_0 ctS$, y adquiere una velocidad u_p, de tal forma que éste ha adquirido un *momentum* igual a $\rho_0 ctSu_p$. La razón a la cual el gas adquiere *momentum* es igual a la fuerza neta exterior que la causa. En términos de la diferencia de presión, ésta fuerza es $(p_1 - p_0)S$. De acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$p_1 - p_0 = \rho_0 c u_p.$$

Igualamos el trabajo realizado sobre la muestra por la fuerza exterior a la energía total que el gas adquiere en un tiempo t. Dado que el trabajo hecho es realizado únicamente por el pistón, tendremos:

$$p_1 S u_P t = \frac{1}{2} \rho_0 ctS u_p^2 + \rho_0 ctS (E_1 - E_0).$$

Aquí la presión involucrada es p_1 en lugar de $p_1 - p_0$, responsable por la razón de incremento en el *momentum* del gas. Dividiendo por S y t, tenemos

$$p_1 u_p = \frac{1}{2} \rho_0 c u_p^2 + \rho_0 c (E_1 - E_0).$$

Este conjunto de ecuaciones se conocen como las relaciones de *Rankine-Hugoniot*. Estas ecuaciones involucran explícitamente ocho variables, las condiciones iniciales del gas p_0, ρ_0, E_0,

sus condiciones finales p_1, ρ_1, E_1 y las dos velocidades c y u_p. La relación de la energía interna E con la presión y la densidad es:

$$E = \frac{1}{\mu} C_v T,$$

en donde C_v es el calor específico molar a volumen constante y μ es el peso molecular. En la aproximación del gas ideal:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{\mu} T.$$

Combinando las anteriores expresiones:

$$E = \frac{p}{\mu(\gamma - 1)}.$$

La diferencia en la energía interna por unidad de masa del gas entre los estados final e inicial es por lo tanto,

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0}\right).$$

Combinando las expresiones anteriores, obtenemos la velocidad de propagación de la onda de choque en función del cambio de presión

$$\boxed{c = c_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right)\right]^{1/2}.}$$

Es conveniente definir el número de Mach como la relación entre la velocidad de choque y la velocidad del sonido c_0

$$\boldsymbol{M} = \frac{c}{c_0}.$$

En términos de $\boldsymbol{M}$, la relación de la presión es:

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(\boldsymbol{M}^2 - 1).$$

Las ecuaciones anteriores revelan las siguientes propiedades interesantes:

1) La relación de densidades en los dos lados del frente de la onda de choque se aproxima a un límite que depende de γ (gas ideal monoatómico):

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/\boldsymbol{M}^2}.$$

2) Las relaciones de presión y la temperatura aumentan rápidamente con el cuadrado del número de Mach $\boldsymbol{M}^2$.
3) La velocidad del pistón, i.e., la velocidad del gas detrás del frente de onda de choque siempre es menor que $\boldsymbol{M}$ pero crece linealmente con $\boldsymbol{M}$.

4) El proceso termodinámico involucrado en la formación de una onda de choque es de carácter irreversible, conforme el número de Mach aumenta.
5) El número de Mach del gas que se desplaza detrás del pistón puede encontrarse como

$$\boldsymbol{M_p} = \frac{u_p}{c} = \frac{2}{\gamma + 1}\left(\boldsymbol{M} - \frac{1}{\boldsymbol{M}}\right).$$

2.104 *Ecuación de onda no lineal en una cuerda.* Demostrar que para grandes amplitudes la ecuación de las ondas transversales en una cuerda se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right).$$

R. Partimos de la expresión general para el movimiento transversal de un segmento de cuerda de longitud Δx y densidad μ:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{1}{\Delta x}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \approx \frac{T}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(\sin\theta),$$

en el límite $\Delta x \to 0$. Utilizando la aproximación en series de potencia para la función $\sin\theta$: $\sin\theta = \tan\theta - \frac{1}{2}\tan^3\theta + \cdots$ obtenemos:

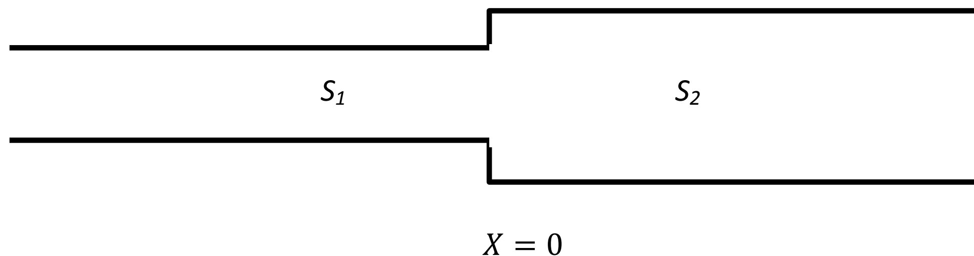
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan\theta - \frac{1}{2}\tan^3\theta\right) = \frac{T}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3\right),$$

utilizando la aproximación tangente en un punto $\tan\theta = \partial y/\partial x$. Finalmente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right),$$

el cual corresponde a la forma requerida.

2.105 *Un tubo largo* de área S_1 está acoplado a un segundo tubo de área S_2, como se ilustra en la figura. Ondas sonoras son enviadas desde el primer tubo a través de la juntura, donde son parcialmente reflejadas. Hallar los coeficientes de la amplitud y de la intensidad de reflexión y transmisión en la juntura.



$X = 0$

R. La condición de continuidad de la presión en ambos lados de la juntura es: $p_1 = p_2$mientras que la conservación del flujo conduce a $S_1 v_1 = S_2 v_2$, en donde v_j es la velocidad de las

partículas normal a la superficie. La impedancia acústica antes y despúes de la juntura Z_1 y Z_2 están definidas como:

$$Z_1 = \frac{p_1}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{p_2}{v_2}\right) = \frac{S_1}{S_2} Z_2.$$

El coeficiente de reflexión

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1 - \frac{S_1}{S_2}}{1 + \frac{S_1}{S_2}};$$

y el coeficiente de transmisión es:

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2}{1 + \frac{S_1}{S_2}}.$$

Coeficiente de intensidad de reflexión: $R = r^2$. Coeficiente de intensidad de transmisión: $T = (Z_1/Z_2)t^2$, $R + T = 1$.

2.106 *Erupción.* En una erupción volcánica de 1 ms se originan 10^6 J de energía en una onda sonora. Estime la intensidad y el nivel de intensidad asociada a la onda cuando ésta alcanza un punto situado a 1 km del evento. Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s a 20 °C y la densidad del aire como 1.3 km/m^3.

R. La potencia de la fuente se puede estimar como la energía liberada en 1 milisegundo: $P = E/t = 10^9$ W. La intensidad media a una distancia de 1 km, asumiendo que el sonido se propaga de forma isotrópica es: $\langle I \rangle = P/4\pi R^2 = 79.58\ \mathrm{W/m^2}$. El nivel de intensidad escuchado a esa distancia es $\beta = 10\log(\langle I \rangle/I_0) = 139$ dB !!.

2.107 La intensidad en el umbral de audición para el oído humano a una frecuencia aproximada de 1 kHz es $I_0 = 1.0 \times 10^{-12}$ W/m^2, para el cual el nivel de intensidad β es 0 dB. El umbral del dolor a la misma frecuencia es alrededor de 120 dB o $I = 1.0$ W/m^2, correspondiente a un incremento en la intensidad en un factor de 10^{12}. En qué factor cambia la amplitud de desplazamiento u_0?.

R. A la misma frecuencia, las intensidades de las ondas están relacionadas con la amplitud de desplazamiento como:

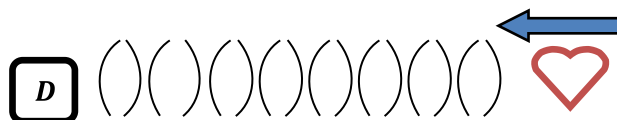
$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{u_0(@120\ \mathrm{dB})}{u_0(@0\ \mathrm{dB})}\right)^2 = 10^{12}.$$

La relación de amplitudes es:

$$\frac{u_0(@120\ \mathrm{dB})}{u_0(@0\ \mathrm{dB})} = \sqrt{10^{12}} = 10^6.$$

La amplitud de desplazamiento molecular cambia en un factor de 10^6 entre el umbral del audición y el umbral del dolor.

2.108 Un dispositivo Doppler genera ondas de ultrasonido de $f_d = 2.26$ MHz y se utiliza para monitorear el latido cardiaco de un feto. Una frecuencia de pulsación (máxima) de 500 Hz es detectada. Asumiendo que la velocidad del sonido en el tejido es $v_W = 1540$ m/s, calcular la velocidad máxima de la superficie del corazón del feto.



R. El dispositivo (en reposo) genera una onda que viaja hacia el feto y ésta se refleja con un valor máximo de frecuencia cuando el movimiento de la pared del órgano **se acerca** hacia la fuente, con una velocidad desconocida v_F. La diferencia entre la onda emitida y la onda reflejada *en el dispositivo* corresponde a la pulsación detectada: 500 Hz. De esta forma, teniendo en cuenta la convención de signos, tendremos que la frecuencia reflejada por el feto es:

$$f_r = \left(1 + \frac{v_F}{v_W}\right) f_d,$$

mientras que la frecuencia que detecta el aparato es:

$$f_d' = \frac{\left(1 + \frac{v_F}{v_W}\right)}{\left(1 - \frac{v_F}{v_W}\right)} f_d.$$

La pulsación corresponde a la diferencia $f_d' - f_d = \Delta f = 500$ Hz.

$$\Delta f = \frac{2\frac{v_F}{v_W}}{\left(1 - \frac{v_F}{v_W}\right)} f_d$$

Despejando v_F obtenemos:

$$v_F = \left(\frac{\frac{\Delta f}{f_d}}{2 + \frac{\Delta f}{f_d}}\right) v_W = 17.1\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

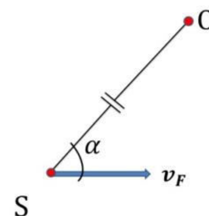
2.109 Si la velocidad del flujo sanguíneo en la aorta es alrededor de 0.32 m/s, cuál será la frecuencia de una pulsación que se esperaría si ondas de ultrasonido de 5.50 MHz se dirigen a lo largo del flujo y son reflejadas por las células rojas de la sangre?. Asumir que las ondas viajan con una velocidad de 1540 m/s.

R. En este caso, la pulsación está dada por: (con un procedimiento similar al Ej. ***2.108***)

$$\Delta f = \frac{2\frac{v_C}{v_W}}{\left(1+\frac{v_C}{v_W}\right)} f_d,$$

en donde v_C es la velocidad de las células rojas. Numéricamente, $\Delta f = 2{,}285$ Hz.

2.110 Suponga que una fuente de sonido con frecuencia f_F se mueve con velocidad $\boldsymbol{v_F}$ respecto a un observador distante y en reposo. Sin embargo, $\boldsymbol{v_F}$ no se encuentra en la línea que une a la fuente y el observador. Hallar la frecuencia y la longitud de onda que capta el observador en términos de la velocidad del sonido v_W y del ángulo formado entre la línea $\overline{\boldsymbol{SO}}$ y el vector $\boldsymbol{v_F}$.



R. En este caso utilizamos la fórmula vectorial para el cambio de frecuencia debido al efecto Doppler. $f_O = (1 - \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v_F}/v_W)^{-1} f_F$. Si los vectores $\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{w}}$ y $\boldsymbol{v_F}$ forman un ángulo α, el producto escalar entre estos dos vectores es: $\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v_F} = v_F \cos\alpha$. Finalmente:

$$f_O = \frac{f_F}{\left(1 - \frac{v_F}{v_W}\cos\alpha\right)}.$$

La longitud de onda que capta el observador puede obtenerse desde la frecuencia: $\lambda_O = v_W/f_O$

$$\lambda_O = \frac{(v_W - v_F\cos\alpha)}{f_F}.$$

La frecuencia de las ondas que alcanzan el observador varía en el rango desde $f_O = (1 + v_F/v_W)^{-1} f_F$, el cual corresponde al caso de la fuente alejándose del observador a una distancia muy grande, y $f_O = (1 - v_F/v_W)^{-1} f_F$ que es el caso de la fuente acercándose hacia el observador desde el *infinito*. En el caso $\alpha = 90°$ no existe cambio entre la frecuencia emitida y la captada.

2.111 Una cuerda de guitarra de $L = 75$ cm y 2.10 g de masa está cerca de un tubo con un extremo abierto y también de 75 cm de largo. Cuál es la tensión que debe tener la cuerda si se produce resonancia entre su modo fundamental y el tercer armónico en el tubo?

R. La frecuencia del modo fundamental de vibración de una cuerda es:

$$f_F = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

Mientras que la frecuencia del tercer armónico en un tubo con un extremo cerrado es:

$$f_3 = \frac{3v_S}{4L};$$

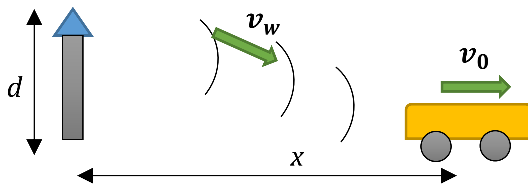
en donde $v_S = 343$ m/s es la velocidad del sonido en el aire a 20°C. En resonancia:

$$f_3 = f_F; \quad \text{ó} \quad T = \frac{9v_S^2 M}{4L} = 741 \text{ N}.$$

2.112 Cuál es módulo máximo de la aceleración para un elemento de un hilo por el que se propaga una onda con 25 mm de amplitud, 0.72 m de longitud de onda, 4.1 Hz de frecuencia y con dirección de propagación hacia *+X.*?
R. Un elemento transversal de la cuerda experimentará *M.A.S* cuya aceleración máxima es:

$$|a_{max}| = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A = 16.59 \text{ m/s}^2$$

2.113 *Efecto Doppler.* En un pequeño poblado, una sirena está elevada a 100 m desde el suelo. Un auto se aleja a 100 km/h directamente desde esta sirena mientras emite un sonido de 440 Hz. Cuál es la frecuencia del sonido que escucha el conductor como función de la distancia a la sirena?. Graficar esta frecuencia como función de la posición del auto hasta 1000 m.



R. Utilizamos la relación para la frecuencia detectada por un observador que se mueve a una velocidad v_w:

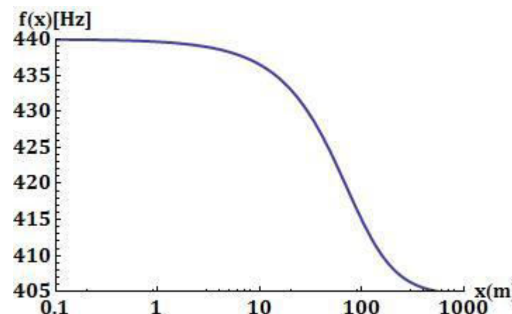
$$f_o = \left[1 - \frac{\boldsymbol{v_0} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_w}{v_w}\right] f_f$$

$$f_o = \left[1 - \frac{\boldsymbol{v_0} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_w}{v_w}\right] f_f = \left[1 - \frac{v_0}{v_w}\cos\theta\right] f_f$$

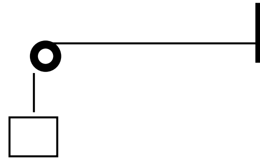
El coseno del ángulo entre los vectores de velocidad en términos de la altura de la sirena y la distancia al móvil se calcula como: $\cos\theta = x/\sqrt{x^2 + d^2}$. Reemplazando:

$$f_0 = \left[1 - \frac{v_0}{v_w}\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right] f_f.$$

En cercanías de la sirena, la frecuencia que capta el observador es aproximadamente igual a la de la fuente (sirena) $f_0 \sim f_f$. Suficientemente alejado de la fuente, la frecuencia disminuye como $f_0 \sim [1 - v_0/v_w] f_f$. Después de 1 km de recorrido, la frecuencia captada es aproximadamente igual a 404.5 Hz.



2.114 *La frecuencia fundamental* para una onda estacionaria en una cuerda de 85 cm es 16 Hz, y su densidad lineal de masa es 0.18 kg/m. Cuál es la masa del bloque suspendido?



R. La tensión en la cuerda es:

$$T = Mg,$$

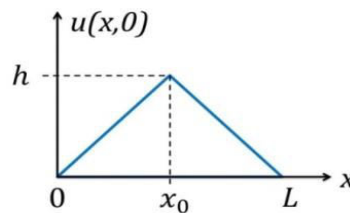
mientras que la frecuencia del modo fundamental es de vibración es:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}.$$

Despejando la masa del bloque M:

$$M = \frac{4L^2 f^2 \mu}{g} = 13.6 \text{ kg}.$$

2.115* (a) Hallar las vibraciones de una cuerda con extremo fijos en $x = 0$ y $x = L$, perturbada por una desviación inicial representada en la figura. (b) Calcular la energía de cada armónico considerando que las velocidades iniciales en todos los puntos de la cuerda son iguales a cero. La tensión de la cuerda es T y la densidad lineal de masa es μ.



R. (a) Es necesario resolver el problema de las vibraciones libres para los desplazamientos transversales $u \to u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L; \quad t > 0.$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0;$$

y la condición inicial:

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}x; & 0 \le x \le x_0 \\ \dfrac{h}{(L-x_0)}(L-x); & x_0 \le x \le L. \end{cases}$$

Exploramos una solución del tipo superposición de ondas estacionarias:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)\,;$$

con la condición de extremo fijo: $\sin(k_n L) = 0$; $k_n = n\pi/L$; $n = 1,2,3\cdots$ y la relación con la frecuencia $\omega_n = n\pi v/L$. La amplitud de las oscilaciones se obtiene de la condición de inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x).$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de la función seno:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(z,0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)dz = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 x_0(L-x_0)}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right).$$

La expresión completa para las vibraciones transversales de la cuerda está definida por:

$$u(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 x_0(L-x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)\,.$$

(b) La energía cinética de los armónicos se define como:

$$K = \frac{1}{2}\mu\int_0^L\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx\,;$$

mientras que la energía potencial es:

$$V = \frac{1}{2}\mu v^2\int_0^L\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

El cálculo directo de la energía total de los armónicos da como resultado:

$$E = K + V = \frac{1}{4}\mu L\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 A_n^2.$$

Consideremos el caso especial en donde la cuerda se deforma en el punto medio $x_0 = L/2$. La energía total de los armónicos se reduce a la expresión:

$$E = \frac{2}{L}\mu h^2 v^2,$$

teniendo en cuenta la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi/2)^2 /n^2 = \pi^2/8$. El trabajo mecánico necesario para deformar la cuerda cuasi-estáticamente se calcula mediante la integral:

$$W = \int_0^h F_Y dY = 2T \int_0^h \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + (L/2)^2}} dY = 2\mu v^2 \left\{\sqrt{h^2 + (L/2)^2} - L/2\right\} \approx \frac{2}{L} \mu h^2 v^2; \quad (h \ll L),$$

el cual coincide con la energía total transferida a los armónicos vibracionales.

2.116 (a) Determine la longitud más corta posible de un tubo cerrado en un extremo que resonará en el aire bajo la acción de una fuente sonora de 160 Hz. Considere la velocidad del sonido en el aire como 340 m/s. (b) Calcule este valor para el caso del tubo abierto en los dos extremos.

R. (a) La longitud de onda para el modo fundamental de vibración de un tubo con un extremo cerrado es $\lambda = 4L$. Si la frecuencia de resonancia es de 160 Hz, entonces, con $\lambda = v/f$, tendremos que la longitud más corta posible es:

$$L = \frac{v}{4f} = 0.53 \text{ m}.$$

(a) En el caso en que ambos extremos sean abiertos, la relación entre la longitud de onda y la longitud del tubo es $\lambda = 2L$:

$$L = \frac{v}{2f} = 1.06 \text{ m}.$$

2.117 Usted está parado entre dos bocinas separadas 80 m. Ambas bocinas están tocando un tono puro de 286 Hz. Usted empieza a correr directamente hacia una de las bocinas y mide una frecuencia de pulsos de 10 Hz. Calcular la velocidad a la cual Ud. Está corriendo.

R. Al acercarse a una de las bocinas, el observador registrará una frecuencia:

$$f_1 = \left(1 + \frac{v_0}{v_w}\right) f_{F,}$$

y al alejarse de la otra bocina, la frecuencia captada es:

$$f_1' = \left(1 - \frac{v_0}{v_w}\right) f_{F.}$$

La frecuencia de pulsación se define como la diferencia de las frecuencias entre las ondas incidentes $\Delta f = 10 \text{ Hz} = f_1 - f_1' = 2v_0 f_F / v_w$. La velocidad del observador es (tomando la velocidad del sonido como $v_w = 343$ m/s):

$$v_0 = \frac{v_w \Delta f}{2f_F} = \frac{10 \times 343}{2 \times 286} = 6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.118 Un meteorito impacta en la superficie del mar con una rapidez de 8800 m/s. Cuáles son los ángulos de la onda de choque que produce (a) En el aire justo antes de impactar en la

superficie del océano y (b) en el océano justo después de entrar?. Suponga que las velocidades del sonido en el aire y en el agua son 343 m/s y 1560 m/s respectivamente.

R. Utilizamos $\alpha = \arcsin(v/v_S)$, en donde v_S es la velocidad de la fuente y v es la velocidad del sonido en el medio (Ver Ej. **2.92**). (a) 2.23°, (b) 10.21°. En esta aproximación se considera que la velocidad del meteorito no cambia significativamente al ingresar al océano.

2.119 Un terremoto genera tres tipos de ondas: Ondas superficiales (L), que son las más lentas y débiles; ondas de corte (S), que son transversales y transportan la mayor cantidad de energía, y ondas de presión (P) que son longitudinales que se mueven más rápido. La rapidez de las ondas P es de aproximadamente 7 km/s, y la de las ondas S es aproximadamente 4 km/s. Al parecer algunos animales logran detectar las ondas P. Si un perro detecta la llegada de las ondas P y empieza a ladrar 30 s antes de que el terremoto sea sentido por los humanos, cuál es la distancia aproximada del perro al epicentro?.

R. Sea x la distancia requerida y Δt el intervalo de tiempo asociado a la diferencia de llegada de las dos ondas. Por lo tanto:

$$x = v_P t_1 = v_S t_2.$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 30 \text{ s}.$$

$$v_P t_1 = v_S(t_1 + \Delta t).$$

Despejando t_1

$$t_1 = \frac{v_S \Delta t}{v_P - v_S},$$

y reemplazando en la ecuación inicial:

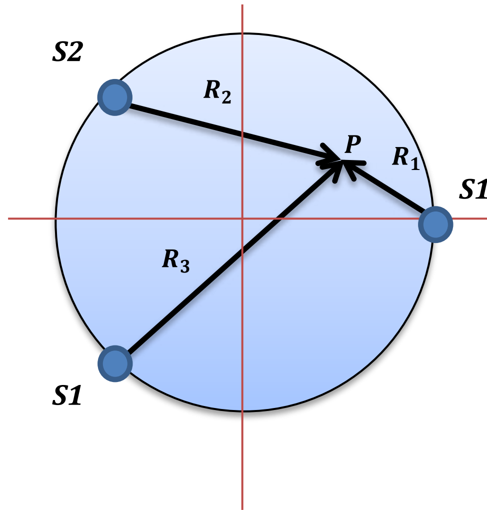
$$x = \frac{v_P v_S \Delta t}{v_P - v_S} = 280 \text{ km}.$$

2.120 Una pequeña pelota flota en el centro de una piscina circular que tiene un radio de 5 m. Se colocan tres generadores de ondas en la orilla de la piscina, separados por 120°. Los generadores trabajan con una frecuencia de 2 Hz, 3Hz y 4 Hz respectivamente. Si la rapidez de cada onda en el agua es de 5 m/s y la amplitud de las ondas es la misma, trace la altura de la pelota en función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = 2$ segundos, suponiendo que el nivel de la superficie del agua es cero. Suponer que todos los generadores de onda imparten un corrimiento de fase cero. Cómo cambia la respuesta si uno de los generadores fuera cambiado a una ubicación diferente en la orilla de la piscina?

R. El desplazamiento producido por la onda resultante en cualquier punto se obtiene por principio de superposición:

$$z(\boldsymbol{P}, t) = A\sin[\boldsymbol{k_1} \cdot \boldsymbol{R_1} + \omega_1 t] + A\sin[\boldsymbol{k_2} \cdot \boldsymbol{R_2} + \omega_2 t] + A\sin[\boldsymbol{k_3} \cdot \boldsymbol{R_3} + \omega_3 t],$$

en donde los vectores $\boldsymbol{R_j}$ corresponden a la ubicación desde las fuentes a cualquier punto $\boldsymbol{P}$. Ver Figura adjunta.

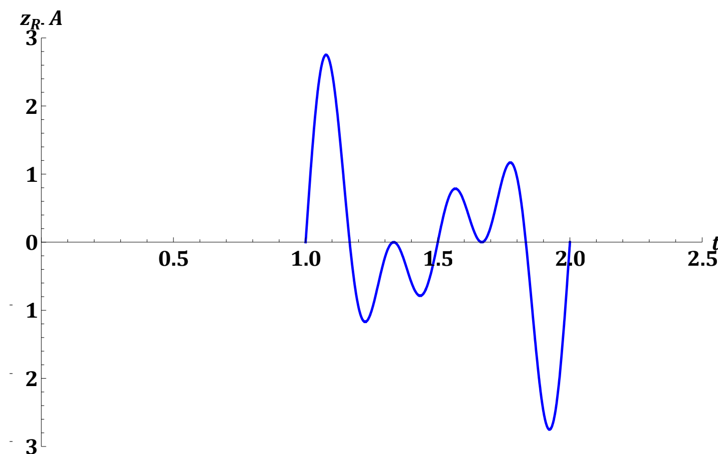


Si el punto P coincide con el origen de coordenadas, entonces $|\boldsymbol{R_1}| = |\boldsymbol{R_2}| = |\boldsymbol{R_3}| = R$. Las direcciones de vectores de onda son paralelas a los vectores $\boldsymbol{R}$: (los vectores $\boldsymbol{k}$ tienen la misma dirección de la velocidad de propagación de las ondas). La solución para $t > R/v$ segundos (a todas las ondas les toma un (1) segundo en alcanzar el centro de la piscina) es:

$$z_R(0,t) = 0, \quad 0 < t < R/v.$$

$$z_R(0,t) = A\sin\left[\omega_1\left(t - \frac{R}{v}\right)\right] + A\sin\left[\omega_2\left(t - \frac{R}{v}\right)\right] + A\sin\left[\omega_3\left(t - \frac{R}{v}\right)\right], \qquad t > R/v.$$

En este caso se cumple la relación vectorial: $\boldsymbol{R_j} + \boldsymbol{R_S} = \boldsymbol{R_P}$. Con $\boldsymbol{R_P} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R_j} = -\boldsymbol{R_S} = -\boldsymbol{R}$. Si uno de los generadores es cambiado de posición, el resultado permanece invariable.



Solución ejemplo ***2.119***

2.121 Dos cuerdas de diferentes densidades de masa se unen y se tensan en un punto mientras que se fijan los extremos resultantes. Una cuerda tiene 3 m de longitud y densidad de masa igual a 2 g/m, mientras que la otra tiene una longitud de 1 m y una densidad de masa de 0.5 g/m. Si la tensión en ambas cuerdas es de 4.80 N, hallar la frecuencia más baja que permitiría la formación ondas estacionarias en ambas cuerdas con un nodo en la unión.

R. La velocidad de propagación de la onda en la primera cuerda es $v_1 = 48.98$ m/s, mientras que en la segunda cuerda $v_2 = 2v_1 = 97.98$ m/s. Con un nodo a 3 m del extremo, la frecuencia fundamental de la primera cuerda es $f_1 = 8.165$ Hz, mientras que en la segunda cuerda, con un nodo a 1 m del otro extremo, la frecuencia fundamental es $f_2 = 6f_1 = 48.98$ Hz. La frecuencia más baja posible en este sistema es 48.98 Hz. $\lambda_2 = 2\lambda_1$, con $\lambda_2 = 2$ m, $\lambda_1 = 1$ m. En 3 m sobre la primera cuerda se formarían seis (6) antinodos.

2.122* Demostrar que la densidad de energía cinética promedio en una onda sonora viajera sinusoidal puede escribirse como:

$$\bar{K} = \frac{1}{4}\rho_0 \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}}^*.$$

en donde $\dot{\boldsymbol{u}}$ es la velocidad de las partículas asociadas al desplazamiento molecular.

R. La densidad de energía cinética de un gas puede calcularse desde la definición:

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 |\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}})|^2.$$

El vector velocidad de desplazamiento de la onda puede representarse, en una dimensión, sin pérdida de generalidad, como:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{i}\dot{u}_{0X} \exp[i(kx - \omega t)],$$

$$|\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{u}})| = \dot{u}_{0X} \cos(kx - \omega t).$$

Reemplazando:

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}_{0X}^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

El valor promedio de $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$. La densidad de energía cinética promedio es por lo tanto:

$$\bar{K} = \langle K \rangle = \frac{1}{4}\rho_0 \dot{u}_{0X}^2.$$

La generalización al caso 3D es inmediata. En términos del cambio máximo de presión del gas: $u_{0X} = \Delta p_m / \rho_0 v$.

$$\bar{K} = \frac{(\Delta p_m)^2}{4\rho_0 v^2}.$$

La densidad de energía potencial (y su valor promedio) en una onda sonora puede escribirse como:

$$V = \frac{p^2}{2B} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 v^2}; \qquad \bar{V} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{\rho_0 v^2}.$$

El flujo de potencia promedio

$$\boldsymbol{P} = p\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}; \qquad \langle \boldsymbol{P} \rangle = \frac{1}{2} p \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}}^{*} = \frac{1}{2} p^{*} \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{0}}.$$

2.123* *Membrana Circular.* Obtener los modos de vibración de una membrana circular de radio a, sometida a una tensión superficial por unidad de longitud F_0 y densidad superficial de masa σ.

R. El desplazamiento transversal de un elemento de masa de la membrana $\psi(r,\theta,t)$ [r como la posición del elemento desde el centro de la membrana], satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \qquad v = \sqrt{\frac{F_0}{\sigma}},$$

en donde ∇^2 es el operador de Laplace en coordenadas polares:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}.$$

Utilizando la técnica de separación de variables, expresamos el desplazamiento transversal como el producto de funciones $\psi(r,\theta,t) \sim R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Utilizando la solución de onda armónica:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi,$$

las ecuaciones resultantes para cada función toman la forma:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{m}{r}\right)^2\right] R = 0,$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \quad \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0,$$

con m como número entero. Con $u = \omega r / v$,

$$\frac{d^2 R}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dR}{du} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right) R = 0.$$

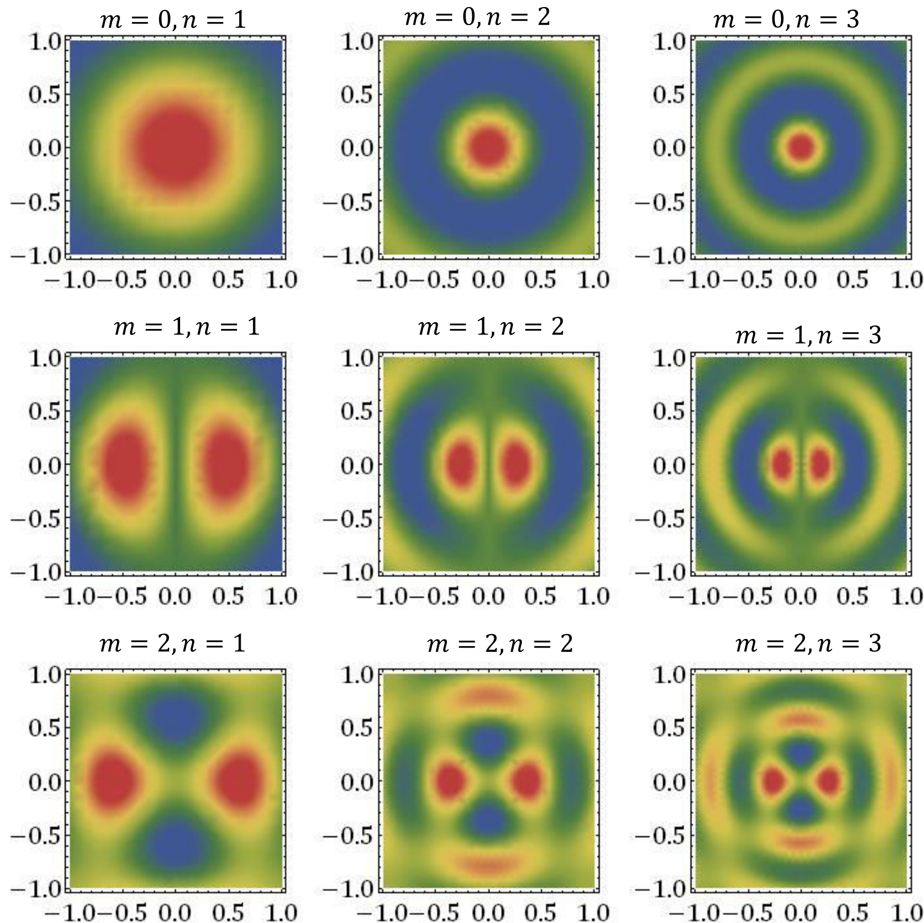
La solución de esta ecuación se escribe en términos de la función de Bessel $R_m(u) \sim J_m(u)$. La condición de frontera $\psi(a,\theta,t) = 0$ (frontera fija), conduce a la ecuación para los ceros de la función de Bessel $J_m(u_{nm}) = 0$, con la representación polinomial de la función de Bessel:

$$J_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+m} k!(m+k)!} u^{2k+m}.$$

Con u_{nm} como el n-ésimo cero de $J_m(u_{nm})$. La siguiente tabla ilustra los ceros de la función de Bessel:

n	$J_0(u_{n0}) = 0$	$J_1(u_{n1}) = 0$	$J_2(u_{n2}) = 0$	$J_3(u_{n3}) = 0$	$J_4(u_{n4}) = 0$
1	2.4048	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.0647
3	8.65373	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725
4	11.7915	13.3237	14.796	16.2235	17.616

Las frecuencias de los modos normales de vibración se obtienen desde la condición: $\omega_{nm} = v u_{nm}/a$.



Modos de vibración membrana circular, $a = 1$.

2.124 Cualquier cantidad física que se conserve debe satisfacer la llamada *ecuación de continuidad*, la cual establece que la razón del incremento de esa cantidad física por unidad de

volumen [o longitud o área] debe ser igual a la razón en la que esta cantidad ingresa al volumen [o longitud o área]. Cuando se aplica a la densidad de energía en un medio elástico, la ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0,$$

en donde E es la densidad de energía elástica total y $\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ es la divergencia del flujo de potencia por unidad de área. Demostrar que esta ecuación ciertamente se satisface para las definiciones utilizadas en el caso de una cuerda tensa.

R. La densidad de energía elástica total es:

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

El flujo de potencia en una dirección puede calcularse desde la definición:

$$P = Fv = \left(-T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

En 1D, el factor $\nabla \cdot \boldsymbol{P}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} \equiv \frac{\partial P}{\partial x} = -T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right).$$

La derivada temporal se reduce a:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right).$$

Sumando:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] = 0.$$

En donde se ha utilizado la relación para la ecuación de onda en el último paréntesis, con $T = \mu v^2$:

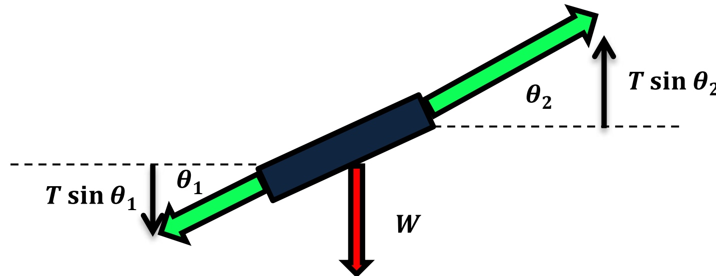
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

2.125 Una onda de amplitud 0.35 mm y 440 Hz se propaga a lo largo de una cuerda con $\mu = 5$ g/m. Cuál es la tensión en la cuerda si la potencia promedio transmitida por la onda es 0.77 W?

R. Desde la fórmula

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 vA^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sqrt{\mu T}A^2; \qquad T = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2\langle P\rangle}{\omega^2 A^2}\right)^2 = 541.1 \text{ N}.$$

Incluir el peso de la cuerda en la deducción de la ecuación de onda, considerando la condición de θ pequeño. Escribir una solución general de la ecuación resultante.



R. Un segmento de cuerda de tamaño Δx está sometido a una fuerza vertical neta

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 - W = \Delta m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

En la aproximación de ángulo pequeño:

$$T\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2 - T\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1 - \mu g\Delta x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu g}{T} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Una transformación del tipo:

$$y(x,t) = Y(x,t) + \frac{\mu g x^2}{2T} + C_1 x + C_2,$$

reduce la ecuación de onda anterior a la forma *usual* para el desplazamiento $Y(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2},$$

cuya solución es: $Y(x,t) = Af\left(x \pm \sqrt{T/\mu}t\right)$. La solución general puede escribirse:

$$y(x,t) = Af\left(x \pm \sqrt{T/\mu}t\right) + \frac{\mu g x^2}{2T} + C_1 x + C_2.$$

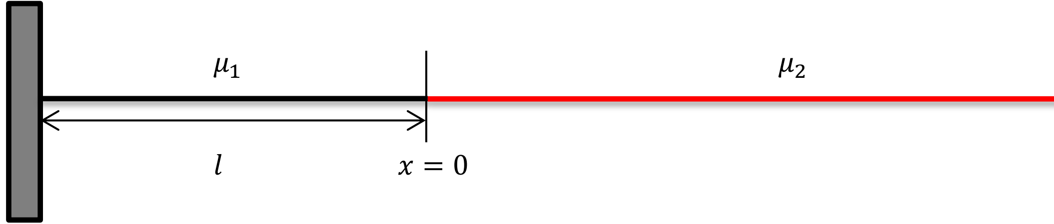
2.126 ** Discutir la reflexión de las ondas armónicas que se propagan hacia la izquierda en una cuerda compuesta y de extensión *semi-infinita*, como se ilustra en la figura. La cuerda está fija en uno de los extremos. La matemática se simplifica si se considera la posición $x = 0$ en la juntura entre las dos cuerdas. *Sugerencia*: *Utilizar una descripción del tipo:*

$$y_i(x,t) = A\cos(k_2 x + \omega t),$$

$$y_r(x,t) = A_r\cos(k_2 x - \omega t + \Delta\varphi),$$

$$y_l(x,t) = B\sin[k_1(x+l)]\cos(\omega t),$$

Con $\Delta\varphi$ como la diferencia de fase entre la onda incidente y la onda reflejada.



R. Las potencias de las ondas incidente, reflejada y transmitida pueden escribirse como:

$$\langle P_i\rangle = \frac{1}{2}v_2\mu_2\omega^2A^2,$$

$$\langle P_r\rangle = \frac{1}{2}v_2\mu_2\omega^2A_r^2,$$

$$\langle P_l\rangle = \frac{1}{2}v_1\mu_1\omega^2B^2.$$

La condición de continuidad en los desplazamientos transversales en $x = 0$ conduce a [tomando los coeficientes de la función $\cos(\omega t)$]:

$$A + A_r\cos\Delta\varphi = B\sin(k_1 l)$$

La condición de continuidad en la derivada $\partial y/\partial x$ en $x = 0$ conlleva a:

$$k_2(A + A_r\cos\Delta\varphi) = -k_1 B\cos(k_1 l).$$

Combinando estas dos expresiones obtenemos las relaciones de las amplitudes reflejada, transmitida en términos de la amplitud incidente:

$$\frac{A_r}{A} = -\frac{k_1\cos(k_1 l)}{k_1\cos(k_1 l)\cos\Delta\varphi + k_2\sin(k_1 l)\sin\Delta\varphi},$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_2\sin\Delta\varphi}{k_1\cos(k_1 l)\cos\Delta\varphi + k_2\sin(k_1 l)\sin\Delta\varphi}.$$

El ángulo de fase de la onda reflejada toma el valor:

$$\tan\Delta\varphi = \frac{2k_1k_2\tan(k_1 l)}{k_1^2 + k_2^2 + (k_1 - k_2)k_2\sec^2(k_1 l)}.$$

el cual puede calcularse desde la relación de las potencias $\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_l \rangle$. En los cálculos anteriores, $k_j = \omega\sqrt{\mu_j/T}$, $j = 1,2$.

2.127 Una cuerda larga sometida a una tensión T posee una densidad lineal de masa μ_1 está acoplada a una segunda cuerda con densidad lineal $\mu_2 \ll \mu_1$. Ondas transversales provenientes desde la cuerda pesada inciden sobre la juntura. Discutir el movimiento subsecuente de las ondas transmitidas y reflejadas.

R. Utilizamos una variante en los resultados de la sección **2.6**. La relación de amplitudes está definida por:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1 - \sqrt{\mu_2/\mu_1}}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}}, \qquad \frac{A_t}{A} = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}}.$$

En el límite en cuestión, la amplitud de la onda transmitida es aproximadamente igual al doble de la amplitud de onda incidente $A_t \approx 2A\left(1 - \sqrt{\mu_2/\mu_1}\right)$, mientras que la amplitud de la onda reflejada tiende a $A_r \approx A\left(1 - 2\sqrt{\mu_2/\mu_1}\right)$. La fracción de la potencia transmitida a la cuerda más liviana es:

$$T_p = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left(\frac{A_t}{A}\right)^2 = \frac{4\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2} \approx 4\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

Finalmente, la fracción de la potencia en la onda reflejada es $R_p = 1 - T_p$. Una onda que viaja desde una cuerda de mayor densidad hacia otra con (mucho) menor densidad experimentará un cambio en su amplitud en un factor aproximado de 2. La onda reflejada en el medio denso tendría prácticamente la misma amplitud de la onda incidente.

2.128 Una cuerda oscilante pierde energía generando ondas sonoras hacia el aire. Si la pérdida de energía para una cuerda con energía E oscilando con un periodo T está dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -k\frac{E}{T},$$

con $k = 0.005$, en que fracción decrece la amplitud por unidad de longitud de onda?.

R. Un estimativo de primer orden puede realizarse de la siguiente manera: la energía que transporta una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones. En un periodo, la onda se desplaza una distancia igual a una longitud de onda, y su amplitud cambia en un factor

$$\frac{dA^2}{dt} = -k\frac{A^2}{T}.$$

Resolviendo

$$2A\frac{dA}{dt} = -k\frac{A^2}{T}, \qquad A(t) = A_0 e^{-\frac{kt}{2T}}.$$

En un periodo de oscilación (en una longitud de onda), la amplitud decrece en

$$\frac{A(T)}{A_0} = e^{-\frac{k}{2}} = 0.997503 \ \ (0.2496\%).$$

La ecuación de una onda con efectos de atenuación unidimensional se escribe como:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{b}{T}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

La solución se plantea en forma de onda:

$$u(x,t) \sim u_0 e^{-i(Kx-\omega t)},$$

con

$$K = k_0\sqrt{1 - i\frac{b}{\mu\omega}}, \qquad k_0 = \frac{\omega}{v_0}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La componente imaginaria de $K = K_r - iK_i$ contiene el decaimiento espacial de la onda en la forma:

$$u(x,t) \sim u_0 e^{-K_i x} e^{-i(K_r x - \omega t)}.$$

Si la onda recorre una distancia $x = \lambda = 2\pi/K_r$ la amplitud decae en un factor $R(x) = e^{-K_i x}$:

$$R(\lambda) = \exp[-2\pi K_i/K_r].$$

Un cálculo simple conduce a:

$$\frac{K_i}{K_r} = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\mu\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\mu\omega}\right)^2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En el caso $b/\mu\omega \ll 1$ [régimen de pequeño amortiguamiento]

$$\frac{K_i}{K_r} \sim \frac{b}{2\mu\omega}.$$

La amplitud se reduce a:

$$\frac{u(\lambda,T)}{u(0,t)} = \exp\left[-\frac{\pi b}{\mu\omega}\right] = \exp\left[-\frac{bT}{2\mu}\right].$$

2.129 Estimar la potencia disipada por periodo en una cuerda de longitud L, densidad de masa μ, la cual oscila en un modo de vibración de una onda estacionaria. Suponer que la fuerza de fricción sobre los elementos de la cuerda debido a las partículas de aire se aproxima desde la expresión general:

$$\Delta F_d(x,t) = -bu_t(x,t)\Delta x,$$

En donde b es una constante de proporcionalidad, en unidades de kg/m·s.

R. La potencia instantánea disipada en el movimiento del elemento Δx

$$\Delta P_d(x,t) = \Delta F_d(x,t)u_t(x,t) = -b\big(u_t(x,t)\big)^2\Delta x.$$

La potencia disipada en una cuerda de longitud L es:

$$P_d(t) = \int_0^L dP_d(x,t) = -\int_0^L b\big(u_t(x,t)\big)^2 dx.$$

Un estimativo simple puede obtenerse desde la ecuación para el desplazamiento de las partículas en una cuerda en un modo de vibración de una onda estacionaria con atenuación, definido por:

$$u(x,t) = u_0 e^{-bt/2\mu}\sin(kx)\sin(\omega t) = A(t)\sin(kx), \quad u(L,t) = 0, \quad u(0,t) = 0.$$

$$P_d(t) = -bA_t(t)^2\int_0^L (\sin(kx))^2 dx = -\frac{bLA_t(t)^2}{2}.$$

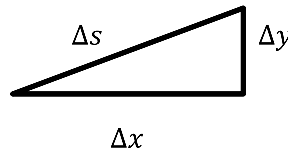
En un periodo de oscilación,

$$P_d(T) = -\frac{bLA_t(T)^2}{2} = -\frac{bLu_0^2}{2}e^{-\frac{bT}{\mu}}.$$

2.130 Demostrar que la energía potencial elástica en un hilo tenso de longitud L es:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx,$$

en donde T es la tensión.



R. La energía potencial elástica es igual a la suma de los trabajos realizados para deformar segmentos de hilo deformados en un diferencial de longitud efectiva $(\Delta s - \Delta x)$ en el campo de fuerza T:

$$U = \Delta W = \int_0^L T(ds - dx) = T\int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = T\int_0^L \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right] dx.$$

Para pequeñas deformaciones $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \to 0$, y

$$U \approx T\int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^6 + \cdots +\right] dx.$$

Conservando el primer término:

$$U = \frac{T}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx.$$

2.131 Dada la ecuación de onda en dos dimensiones $u \to u(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

probar una solución correspondiente a ondas estacionarias de la forma:

$$u(x, y, t) = f(x, y)\sin(\omega t).$$

(a) Hallar una ecuación para la función $f(x, y)$. (b) Enunciar las condiciones para el vector de onda k de forma tal que los campos de desplazamiento se anulen en las posiciones $u(\pm a, \pm b, t) = 0$ con $f(x, y) = A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y)$.

R. (a) Reemplazando en la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0.$$

(b) Con la solución propuesta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_1^2 f,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -k_2^2 f.$$

$$-k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0,$$

Con $\sin(k_1 a) = 0,\ \sin(k_2 b) = 0,\ k_1 a = \pi, 2\pi \ldots k_2 b = \pi, 2\pi \ldots$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \equiv k_{nm},$$

con $n = 1,2 \ldots$ y $m = 1,2 \ldots$ El modo estacionario de menor frecuencia para un medio de simetría cuadrada de lado $a = b$ tendrá una frecuencia:

$$\omega_{11} = \sqrt{2}\frac{\pi v}{a}, \text{ ó } f_{11} = \sqrt{2}\frac{v}{2a}.$$

Las frecuencias toman valores según: $f_{nm} = \sqrt{n^2 + m^2} f_0$ con $f_0 = v/2a$, ó $\sqrt{2} f_0, 2f_0, \sqrt{5} f_0, 3f_0, 2\sqrt{2} f_0, \sqrt{10} f_0 \ldots$

2.132 El nivel de presión sonora (SPL) [*Sound Pressure Level*] está definido en forma similar al nivel de intensidad β (o *SIL* [*Sound Intensity Level*]).

$$SPL = (20\text{dB}) \log_{10}\left(\frac{P_O}{P_{REF}}\right).$$

Demostrar que $SPL = SIL$ si se toma $P_{REF} = 2.9 \times 10^{-5}$ Pa, $P_O = 1.0 \times 10^5$ Pa y $\rho_O = 1.2$ kg/m³. Hallar la amplitud de presión producida por un tambor localizado a 3 m ($\beta \approx 110$ dB).

R. (a) Desde la definición

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I_O}{I_{REF}}\right).$$

Evidentemente, estas dos cantidades son iguales si

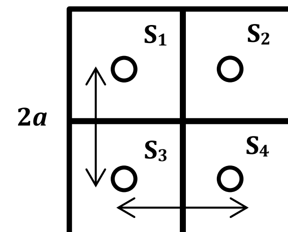
$$\frac{I_O}{I_{REF}} = \left(\frac{P_O}{P_{REF}}\right)^2.$$

Utilizando la definición de la amplitud de presión $P_O = (2\rho v I_0)^{1/2}$, el ejercicio se reduce a comprobar que

$$P_{REF} = (2\rho v I_{REF})^{1/2}.$$

Con $I_{REF} = 1.0 \times 10^{-12}$ W/m², $\rho_O = 1.2$ kg/m³ y $v = 343$ m/s, ciertamente $P_{REF} = 2.8692 \times 10^{-5}$ Pa $\approx 2.9 \times 10^{-5}$ Pa. (b) La intensidad de una onda sonora de 110 dB es 0.1 W/m², y la amplitud de presión $(2\rho v I_0)^{1/2} = 9.07$ Pa.

2.133 **Explorar el patrón de interferencia debido a cuatro fuentes de sonido idénticas con longitudes de onda de 20 cm en un arreglo cuadrado. Considerar que las fuentes se encuentran localizadas sobre las esquinas de un cuadrado de 1 m de lado centrado en el origen de coordenadas. Determinar la intensidad media de las ondas que llegan al punto $P(x, y, z)$ suficientemente alejado de las fuentes.



R. La función de onda resultante en el punto P puede escribirse en la representación compleja como:

$$\psi_P = \psi_0\left(\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r_1}}}{r_1}+\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r_2}}}{r_2}+\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r_3}}}{r_3}+\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r_4}}}{r_4}\right)e^{-i\omega t}.$$

El patrón de intensidad en algún punto arbitrario del espacio se obtiene directamente desde la magnitud $|\psi_P|^2$. Las distancias desde las fuentes al punto P $[\boldsymbol{r}(x,y,z)]$ en la aproximación de pantalla lejana son:

$$r_1 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{S_1}| = \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2+z^2} \approx r\left[1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S_1}}{r}\right],$$

$$r_2 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{S_2}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+z^2} \approx r\left[1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S_2}}{r}\right],$$

$$r_3 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{S_3}| = \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2+z^2} \approx r\left[1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S_3}}{r}\right],$$

$$r_4 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{S_4}| = \sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2+z^2} \approx r\left[1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S_4}}{r}\right],$$

en donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en dirección al punto P desde el origen. La intensidad en el punto P:

$$I_P \sim |\psi_P|^2 \approx \frac{2|\psi_0|^2}{r^2}[2+\cos(kr_{21}) + \cos(kr_{31})+\cos(kr_{32})+\cos(kr_{41})+\cos(kr_{42})+\cos(kr_{43})],$$

con $r_{ij} = \left|\boldsymbol{r_i}-\boldsymbol{r_j}\right|$. En coordenadas esféricas, $\boldsymbol{n} = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{\widehat{U}_X} + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{\widehat{U}_Y} + \cos\theta\,\boldsymbol{\widehat{U}_Z}$.

$$r_{21} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_1}-\boldsymbol{S_2}) = -\sqrt{2}\,a\sin\theta\cos\phi,$$

$$r_{31} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_1}-\boldsymbol{S_3}) = \sqrt{2}\,a\sin\theta\sin\phi,$$

$$r_{32} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_2}-\boldsymbol{S_3}) = \sqrt{2}a\sin\theta\,(\cos\phi+\sin\phi)$$

$$r_{41} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_1}-\boldsymbol{S_4}) = -\sqrt{2}\sin\theta\,(\cos\phi-\sin\phi),$$

$$r_{42} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_2}-\boldsymbol{S_4}) = \sqrt{2}\,a\sin\theta\sin\phi,$$

$$r_{43} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S_3}-\boldsymbol{S_4}) = -\sqrt{2}\,a\sin\theta\cos\phi.$$

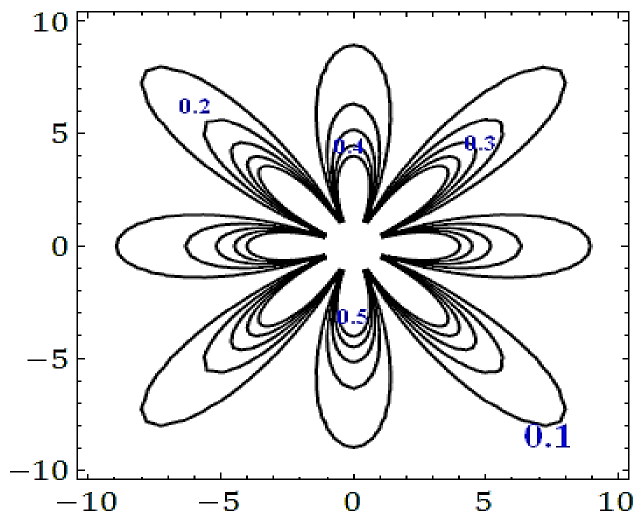
Reemplazando en la expresión de la intensidad resultante en P (*coordenadas esféricas*)

$$I_P \sim |\psi_P|^2 \approx \frac{16|\psi_0|^2}{r^2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ka\cos\phi\sin\theta\right)\right]^2\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ka\sin\phi\sin\theta\right)\right]^2$$

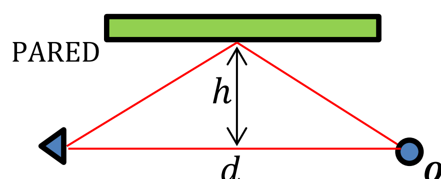
En coordenadas cartesianas:

$$I_P \sim |\psi_P|^2 \approx \frac{16|\psi_0|^2}{r^2}\left[\cos\left(\frac{kax}{\sqrt{2}r}\right)\cos\left(\frac{kay}{\sqrt{2}r}\right)\right]^2.$$

Esta última fórmula debe tomarse cuidadosamente como una aproximación para el caso de un punto suficientemente alejado de las fuentes $r \gg a$. El patrón exacto de la distribución de la intensidad del sonido debe calcularse preferiblemente en forma numérica, como se ilustra en la figura adjunta, con $a = 0.125$ m, $\lambda = 0.2$ m, en el plano $z = 0$. La intensidad está calculada en unidades reducidas. Los valores marcados con 0.5, 0.4,...0.1 corresponden a las intensidades asociadas a cada curva, desde la interna hasta la externa respectivamente.



2.134 Un parlante y una pared reflectora del sonido están arreglados de forma tal que el observador (***O***) sólo escucha el sonido proveniente directamente desde el parlante y el reflectado en la pared. Si la distancia d es 10 m y la frecuencia del sonido es 68 Hz, cuál es la distancia mínima h de forma que interferencia destructiva cancele el sonido en la posición del observador?. Tomar la velocidad del sonido como 340 m/s.



R. La diferencia de recorrido de las ondas que alcanzan el punto ***O*** está definida por:

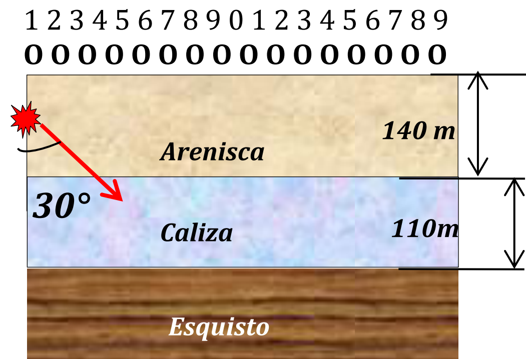
$$\Delta r = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - d.$$

La diferencia de fase que produce interferencia destructiva corresponde a un múltiplo entero impar de π. El mínimo valor de la diferencia de recorrido que produciría interferencia totalmente destructiva es:

$$k\Delta r = \pi, \qquad \frac{2\pi f}{v}\Delta r = \pi, \qquad \Delta r = \frac{v}{2f} = \frac{\lambda}{2}.$$

Despejando $h = \sqrt{v(v + 4fd)}/4f = 3.75$ m.

2.135 **Señales Acústicas* que provienen de cargas explosivas instaladas bajo tierra se utilizan para determinar la profundidad de diferentes capas de rocas. En una prueba, una carga es colocada a 60 m bajo tierra. Sensores acústicos (*geófonos*) están distribuidos en intervalos de 15 m a lo largo de la superficie horizontal. Para un rayo sonoro, como se ilustra en la figura, considere la reflexión y la refracción en cada frontera entre las capas. Determine en cuales de los geófonos es posible detectar las señales de los rayos reflejados. Calcular la diferencia de tiempo mínima en la cual se activa la carga y la señal es detectada.



VELOCIDAD DEL SONIDO EN ROCAS
(km/s)

Arenisca [*Sandstone*]	4.2
Caliza [*Limestone*]	6.0
Esquisto [*Shale*]	2.2

R. En esta aproximación se considera que las superficies son planos perfectos. Utilizamos la ley de Snell en términos de las velocidades de propagación de las ondas en diferentes medios y los ángulos que forman los vectores de onda con respecto a la normal de la frontera de separación:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

El primer rayo acústico en la arenisca se refleja en la roca caliza con el mismo ángulo de incidencia con respecto a la normal. i.e., 30°. La distancia horizontal que alcanza el rayo acústico en la primera reflexión se obtiene aplicando geometría simple:

$$X = 2 \times 80 \times \tan 30° + 60 \times \tan 30° = 127 \text{ m},$$

aproximadamente entre el noveno y el décimo detector. El ángulo refractado en la roca caliza es del orden de:

$$\sin\theta_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{6}{4.2}\sin 30° = 0.714; \quad \theta_2 = 45.6°.$$

La distancia horizontal que recorre el rayo sonoro en la caliza, antes de emerger hacia la roca arenisca es $2 \times 110 \times \tan 45.6\,° = 224.7$ m. El rayo emerge con el mismo ángulo de incidencia con respecto a la normal desde la roca arenisca, i.e. 30°. La distancia horizontal que recorre es por lo tanto $140 \times \tan 30\,° = 80.83$ m. El haz de mayor recorrido alcanza la superficie a una distancia:

$$X' = 80 \times \tan 30° + 2 \times 110 \times \tan 45.6 + 140 \times \tan 30\,° = 351.72 \text{ m},$$

señal que puede detectar entre el geófono 24 y 25 [no mostrados en la figura].

2.136 Considere dos ondas con frecuencias f_1 y f_2 que se propagan a la misma velocidad v. Después de viajar una distancia d, la primera onda ha realizado media oscilación adicional a la segunda onda. Hallar la relación entre las frecuencias de las ondas y su velocidad de propagación.

R. La diferencia de fase asociada a la diferencia de frecuencias en un tiempo de recorrido de la onda igual a d/v es media oscilación adicional $2\pi/2$:

$$\Delta\varphi = 2\pi(f_1 - f_2)\Delta t = \frac{2\pi(f_1 - f_2)d}{v} = \frac{2\pi}{2}$$

$$f_1 - f_2 = \frac{v}{2d}.$$

2.137 Una onda sonora plana en el aire incide normalmente sobre una superficie de agua. La velocidad del sonido en el aire es 334 m/s y en el agua es 1480 m/s. Las condiciones de frontera apropiadas para ondas longitudinales corresponden a las continuidades de las ondas de presión y de desplazamiento. Los coeficientes de reflexión y transmisión deberán ser expresados en términos de las densidades y las velocidades. (a) Cuál es la amplitud de la onda sonora que entra en el agua, expresada como función de la amplitud de la onda incidente? (b) Que fracción del flujo de energía incidente corresponde a esta amplitud de la onda en el agua?.

R. (a) Las condiciones de frontera pueden expresarse como:

$$\rho_1 v_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \rho_2 v_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

$$u_1 = u_2.$$

Cuando una onda incide sobre una frontera, aparecen ondas reflejadas y transmitidas como consecuencia de su interacción con la frontera. Las ondas incidente, reflejada y transmitida pueden escribirse respectivamente como $u_{0i}\cos(k_1 x - \omega t)$, $u_{0r}\cos(k_1 x + \omega t)$ y $u_{0t}\cos(k_2 x - \omega t)$. En ambos lados de la frontera ($x = 0$), las amplitudes de las ondas resultantes son:

$$u_{0i} + u_{0r} = u_{0t}.$$

Las amplitudes de las ondas de presión en la frontera se relacionan como:

$$\rho_1 v_1^2 k_1 (u_{0i} - u_{0r}) = \rho_2 v_2^2 k_2 u_{0t}$$

Combinando estas dos expresiones, obtenemos la fracción de la amplitud de la onda transmitida con respecto a la amplitud de la onda incidente:

$$T = \frac{u_{0t}}{u_{0i}} = \frac{2\rho_1 v_1^2 k_1}{\rho_1 v_1^2 k_1 + \rho_2 v_2^2 k_2} = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}.$$

En la última expresión se utiliza $k_1 v_1 = \omega = k_2 v_2$. El coeficiente de reflexión es:

$$R = \frac{u_{0r}}{u_{0i}} = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}.$$

En este caso, tomando $\rho_1 = 1.2$ kg/m³, $T = 5.4 \times 10^{-4}$, $R = -0.999$. (b) La fracción de energía transmitida:

$$\frac{\langle I_t \rangle}{\langle I_i \rangle} = \frac{\rho_2 v_2 \omega^2 u_{0t}^2/2}{\rho_1 v_1 \omega^2 u_{0i}^2/2} = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} T^2 = 1.1 \times 10^{-3}.$$

Una onda sonora prácticamente refleja toda su amplitud en la superficie del agua en el caso de incidencia normal.

PR 2.14. Calcular la energía total de las vibraciones en una cuerda de longitud L, masa M y tensión T, fija en ambos extremos, si ésta vibra en una superposición de los modos normales:

$$y(x,t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_1 t) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right).$$

R. La energía total asociada a un modo de vibración de una onda estacionaria en una cuerda con perfil $2A\sin(kx)\cos(\omega_1 t)$ es [Ver ejercicio ***2.82***]:

$$\langle E\rangle = \frac{\pi^2 T A^2}{L} n^2.$$

En este caso, la energía total asociada los modos con $n = 1$ y con $n = 3$ es (considerando la corrección del factor 2 en la amplitud):

$$\langle E\rangle = \frac{\pi^2 T}{4L}(A_1^2 + 9A_3^2).$$

Es posible verificar, utilizando el procedimiento desarrollado en el ejercicio ***2.82*** que la energía total corresponde a la suma de las energías asociadas a cada modo por separado.

PR 2.15. Una onda armónica unidimensional se propaga en el sentido positivo de las x, con una velocidad c y una frecuencia f. La amplitud de oscilación es Ψ_0. Obtener (a) una expresión para la función de onda $\Psi(x,t)$. (b) el valor medio temporal del producto

$$-\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\times\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}.$$

Interpretar el resultado.

R. (a) La función de onda puede escribirse, según las condiciones dadas, como:

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right].$$

(b) El producto requerido toma la forma:

$$-\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\times\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{4\pi^2 f^2}{c}\Psi_0^2 \sin^2\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right],$$

Y el valor medio temporal del mismo es:

$$\left\langle -\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\times\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right\rangle = \frac{2\pi^2 f^2}{c}\Psi_0^2 = \frac{(\omega\Psi_0)^2}{2c}.$$

Este resultado puede interpretarse como la relación del cuadrado de la amplitud de las excitaciones temporales del campo $\Psi(x,t)$ y la velocidad de propagación de la onda que las transporta. Esta cantidad está también relacionada con la densidad del momentum promedio asociado a la propagación de la onda en dirección *X*. [Ver Sección **2.4**].

2.138 Las siguientes dos ondas en un medio están superpuestas:

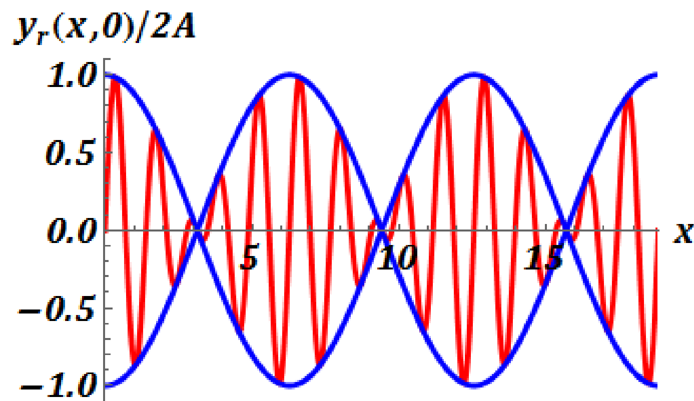
$$y_1(x,t) = A\sin(5x - 10t),$$

$$y_2(x,t) = A\sin(4x - 9t),$$

donde x está en metros y t en segundos. (a) Escribir una ecuación para el efecto de las perturbaciones combinadas. (b) Cual es la velocidad del grupo? (c) Cuál es la distancia entre los puntos de amplitud cero para las perturbaciones combinadas?

R. (a) Utilizando la identidad $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$,

$$y_r(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\sin\left(\frac{9x - 19t}{2}\right)\cos\left(\frac{x-t}{2}\right).$$



Perfil de la onda superpuesta

(b) La velocidad de grupo puede aproximarse como el cambio relativo de la frecuencia de las ondas superpuestas con respecto al número de onda:

$$v_g \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{10-9}{5-4} \approx 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(c) El término que domina la amplitud de las perturbaciones corresponde al término envolvente $\cos\left(\frac{x-t}{2}\right)$ [línea azul]. Los ceros de esta función (independientemente del valor de t) ocurren en las posiciones consecutivas separadas una distancia $\Delta x = 2\pi$ (m).

2.139 ** Se requiere analizar la dinámica de una línea de automóviles moviéndose en un carril de una autopista lineal. Plantear el problema y proponer una solución en el límite de lo tratable, realizando consideraciones relevantes y tendientes a simplificar la respuesta.

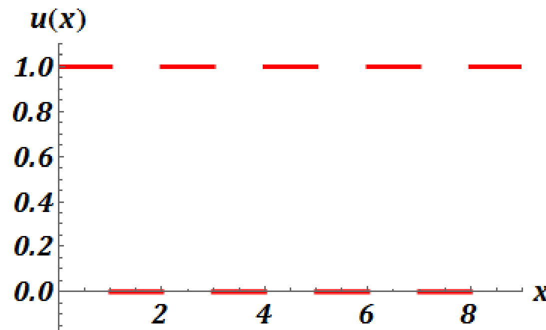
R. Asumimos que todos los autos se desplazan a una velocidad constante v, son del mismo tamaño longitudinal a y están separados la misma distancia consecutiva a. Consideramos además que la autopista es *infinitamente* extendida, o que su tamaño L es muy grande

comparado con el tamaño de un solo automóvil ($L \gg a$). En cierto instante, las posiciones de los cuerpos pueden visualizarse aproximadamente según el diagrama:



http://loosecars.com/13533-thickbox_default/hot-wheels-62-chevy.jpg

El desplazamiento instantáneo del sistema puede describirse mediante la función tipo *onda cuadrada* $u(x)$ con $a = 1$.



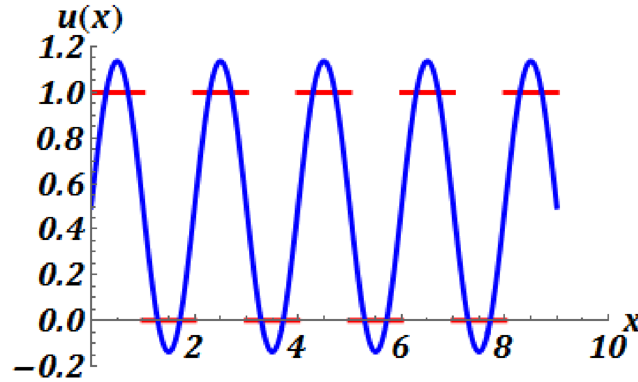
Los valores en los cuales $u(x) = 1$ $[u(x) = 0]$ corresponden a sitios "ocupados" ["no ocupados"] para cierto valor de t. Después de un intervalo $T = 2a/v$, se repite el patrón de ocupación de los autos sobre la autopista. Para un número suficientemente grande de autos, éstos pueden considerarse como cuerpos que se mueven alrededor de sus posiciones de "equilibrio", en un sistema continuo con periodicidad espacial $2a$. El *patrón de ocupación* instantánea puede escribirse en la representación de Fourier como [Ver Ejemplo ***1.29***]:

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{(2j+1)\pi x}{a}\right]}{2j+1}.$$

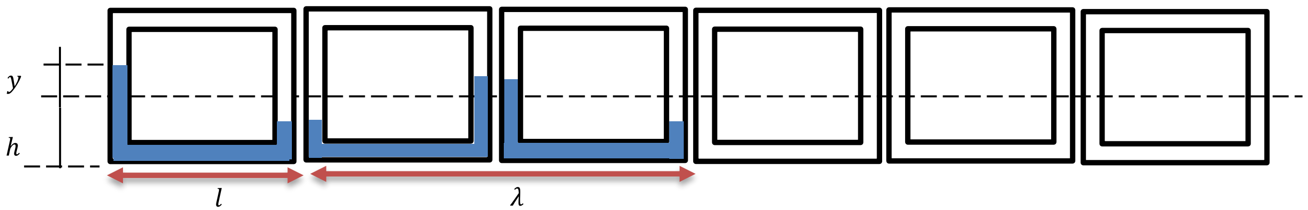
La onda de desplazamiento longitudinal formada por el grupo de automóviles puede obtenerse modificando el argumento de la función $u(x) \rightarrow u(x - vt)$. Tomando el primer armónico en la suma anterior, el perfil de la onda resultante toma la forma:

$$u(x,t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - vt)\right).$$

El resultado se ilustra en la figura adjunta. En esta aproximación hemos considerado que la onda de desplazamiento se propaga a la misma velocidad que la de los automóviles.



2.140 Considere un tubo en forma de **U** con sección transversal uniforme y dos brazos verticales. La longitud total del líquido es l. Imagine que el líquido oscila alrededor de su posición de equilibrio, de tal forma que en cualquier instante los niveles en los brazos laterales son $\pm y$. (a) Escribir una ecuación para la energía potencial del líquido, y demostrar que el periodo de oscilación es $\pi\sqrt{2l/g}$. (b) Considere una sucesión de tubos que pueden ser utilizados para modelar el comportamiento del movimiento de las crestas y los valles de una onda en el agua. Tomando el resultado en (a), y la condición $\lambda \approx 2l$ implícitamente dada en esta analogía, deducir la velocidad de las ondas en el agua. Asumir que sólo una pequeña fracción del líquido se encuentra en los brazos verticales. (c) Utilizar el resultado exacto $v = \sqrt{g\lambda/2\pi}$, para calcular la velocidad de una onda con $\lambda = 500$ m en el océano.



R. (a) La energía potencial gravitacional del centro de masa del líquido en ambos brazos del tubo es [ver ejemplo ***1.49***]:

$$U(y) = \frac{m_I g(h+y)}{2} + \frac{m_D g(h-y)}{2},$$

en donde h es la distancia vertical desde la base del tubo al nivel de referencia. Las masas del fluido que se desplazan en ambos brazos están dadas por:

$$m_I = \rho g S(h+y), \qquad m_D = \rho g S(h-y);$$

con S como la sección transversal, y ρ como la densidad de masa del líquido. La energía potencial gravitacional se reduce a:

$$U(y) = U_0 + \rho g S y^2,$$

y $U_0 = \rho g S h^2$. El periodo de oscilación se obtiene directamente desde la constante de restitución, utilizando la aproximación en el límite $h \to 0$:

$$k \approx 2\rho g S \approx \frac{2mg}{l}.$$

El periodo es:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Considerando que todo el líquido se desplaza con velocidad (dy/dt), la energía total se escribe como:

$$\frac{2E}{M} = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{2g}{l}y^2.$$

(b) La velocidad de propagación de las ondas en el agua con $\lambda \approx 2l = 500$ m,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\pi}\sqrt{2gl} \approx 22.28 \text{ m/s}.$$

(c) Valor exacto: $v = \sqrt{g\lambda/2\pi} = 27.93$ m/s.

2.141 Considere un cubo uniforme de lado L en cuyo interior existen ondas sobre los ejes principales con velocidad característica igual a v. Demostrar que el número total de modos de vibración correspondientes a frecuencias entre f y $f + \Delta f$ es:

$$\Delta N = \frac{4\pi f^2 L^3}{v^3}\Delta f, \qquad \frac{v}{2L} \ll \Delta f \ll f.$$

R. Cuando se crean ondas estacionarias en un sistema tridimensional, los números de onda están definidos según:

$$k_X = \frac{n_X \pi}{L}, \qquad k_Y = \frac{n_Y \pi}{L}, \qquad k_Z = \frac{n_Z \pi}{L},$$

con los n_j como números enteros. La relación entre la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda es

$$kv = 2\pi f = v\sqrt{k_X^2 + k_Y^2 + k_Z^2} = \frac{\pi v}{L}\sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}; \qquad \sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2} = \frac{2fL}{v}.$$

El número de puntos en cualquier región de esta red es por igual su volumen, y los modos correspondientes a una frecuencia dada f están asociados a aquellos puntos localizados a una *distancia* $r = 2fL/v$ desde el origen. El resultado es igual a: $4\pi r^2 \Delta r$. En el octante positivo de este espacio numérico, el diferencial de volumen está restringido en una octava parte del valor total, y el número de modos confinados en ese rango de frecuencias es:

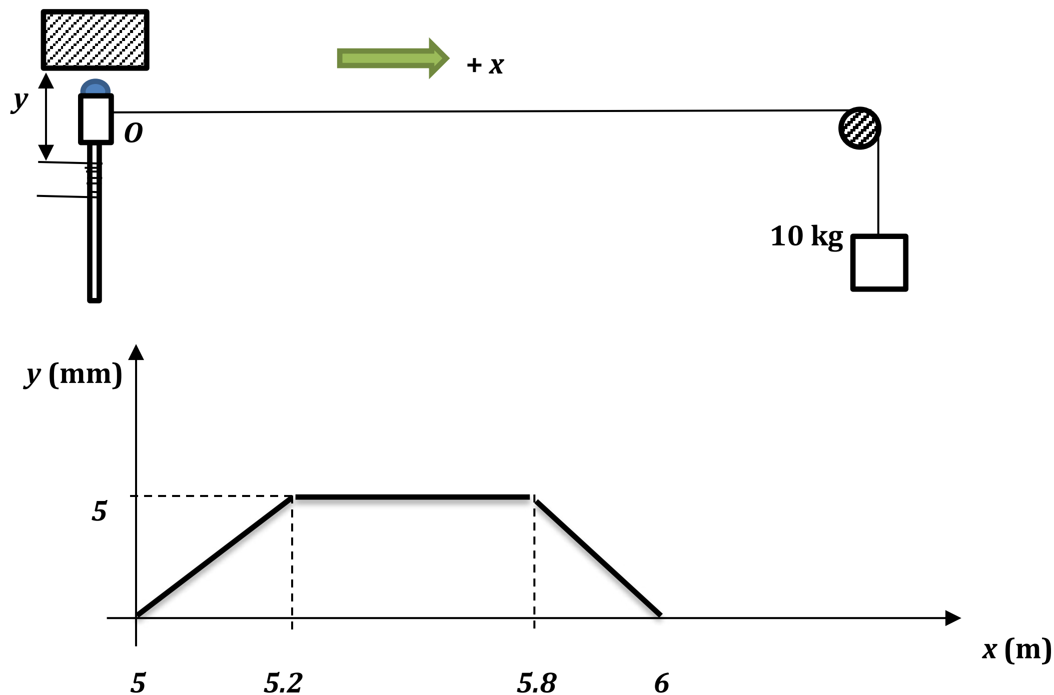
$$\Delta N_{3D} = \frac{1}{2}\pi r^2 \Delta r = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2fL}{v}\right)^2 \frac{2L}{v}\Delta f = \frac{4\pi f^2 L^3}{v^3}\Delta f.$$

Esta aproximación es válida si $r \gg 1$, $f \gg v/2L$ y $\Delta r \ll r$ o $\Delta f \ll f$. En el caso bidimensional, modificamos la expresión para el diferencial de volumen, al diferencial de área en el primer cuadrante: $2\pi r \Delta r$

$$\Delta N_{2D} = \frac{1}{2}\pi r \Delta r = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2fL}{v}\right)\frac{2L}{v}\Delta f = \frac{4\pi f L^2}{v^2}\Delta f.$$

Para un sistema 1D, con este argumento: $\Delta N_{1D} = L\Delta f/v$.

2.142* *Interruptor*. Se requiere estudiar el movimiento vertical de un interruptor operado magnéticamente. El contacto está acoplado en un extremo a un hilo de masa $m = 5$ g y longitud total $L = 12.5$ m. Sobre el otro extremo el hilo pasa sobre una polea pequeña sin fricción y una masa de $M = 10$ kg que cuelga de él, como se ilustra en la figura. El contacto actúa de tal forma que el interruptor, inicialmente *abierto*, llega a la posición *cerrado*, se mantiene en esta posición por un tiempo, y se abre de nuevo. El hilo es fotografiado con una cámara de alta velocidad, y se encuentra que éste esta deformado entre 5 y 6 m, como se ilustra ($x = 0$ es el punto O donde el hilo está conectado al contacto). (a) Por cuánto tiempo el interruptor está completamente cerrado? (b) Cuál es la máxima velocidad del contacto? (c) Describir el movimiento subsecuente de las perturbaciones en el hilo, despreciando los efectos disipativos. (d) A qué valor de t fue tomada la fotografía?.



R. (a) La velocidad de propagación del pulso es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{MgL}{m}} = 495\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

El interruptor se mantiene completamente cerrado cuando el pulso recorre 0.6 m (el desplazamiento del contacto se mantiene en ***y = 5*** mm en ese intervalo). Si la velocidad del pulso es 495 m/s, el tiempo en el cual éste recorre una distancia de 0.6 m es **1.212** ms.

(b) La máxima velocidad (transversal) del contacto se puede estimar de la relación simple:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x} \cong \frac{v_Y}{v}; \qquad v_Y \cong v\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong 495 \times \frac{0.005}{0.2} \cong 12.38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

El contacto tiene la misma velocidad transversal en el proceso de conexión y desconexión.

(c) Después de la generación del pulso, éste viajará continuamente a través del hilo, experimentando reflexiones en los extremos $x = 0$ y $x = L$.

La condición de frontera para el pulso en $x = 0$ se puede escribir como:

$$y(0,t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < t_0; \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

mientras que $y(L,t) = 0$ y t_0 es el tiempo de acción del contacto. Para un pulso que se propaga hacia la derecha, con $t_0 < t < L/v$, una posible solución puede tratarse con una transformación del tipo [D'Alembert]

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Sin embargo, esta ecuación no satisface la condición de frontera en $x = L$. Consideramos por lo tanto una onda *reflejada* que viaja hacia la izquierda con un perfil $-f(t - L/v)$ en $x = L$. Esta onda puede tomarse para cualquier distancia arbitraria x como $-f(t - 2L/v + x/v)$, y la solución

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2L}{v} + \frac{x}{v}\right)$$

satisface la condición de frontera en $x = L$ para $t < 2L/v$. Continuando con este proceso, es posible construir la solución completa en forma de series:

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{x}{v}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} + \frac{x}{v}\right).$$

Verificamos la primera condición $y(0,t) = f(t)$. La segunda condición en $x = L$,

$$y(L,t) = f\left(t - \frac{L}{v}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{L}{v}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} + \frac{L}{v}\right),$$

$$y(L,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{L}{v}\right) - \sum_{n=2}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} + \frac{L}{v}\right).$$

Reemplazando $n \to n+1$ en la segunda suma y modificando sus límites:

$$y(L,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{L}{v}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2(n+1)L}{v} + \frac{L}{v}\right),$$

$$y(L,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{L}{v}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f\left(t - \frac{2nL}{v} - \frac{L}{v}\right) = 0.$$

En forma específica, la función $f(t)$ se define como:

$$f(t) = g(t)\Theta(t_0 - t),$$

en donde $\Theta(x)$ es la función escalón unitario de Heaviside, la cual toma valores de 1 si $x > 0$ y 0 para $x < 0$. La acción del interruptor corresponde a un pulso inducido de 1 m de longitud, el cual toma unos $t_0 = \mathbf{2.02}$ ms en su formación. La función del pulso puede describirse explícitamente por:

$$g(t) = \begin{cases} 12.38t & 0 < t < 0.404 \text{ ms} \\ 0.005 & 0.404 < t < 1.616 \text{ ms} \\ 0.025 - 12.38t & 0.404 < t < 2.02 \text{ ms.} \end{cases}$$

(d) La fotografía fue tomada cuando el pulso ocupa un lugar en el hilo entre 5 y 6 m. Éste ha recorrido por unos **5** m en **10.10** ms después de ser generado en el mecanismo. Tomando en cuenta el tiempo de formación, el tiempo de la fotografía es **12.12** ms justo después de la activación.

3. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Enunciamos las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo y la derivación de las ecuaciones de propagación de las ondas electromagnéticas en coordenadas cartesianas. Muchos textos realizan la discusión detallada del significado físico de las componentes de estas expresiones, (e.g. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 1998), mientras que en estas notas trazaremos una introducción simple en el contexto del fenómeno ondulatorio en medios homogéneos, en conexión directa con los conceptos discutidos en el capítulo anterior. La descripción de los fenómenos ondulatorios en la teoría del electromagnetismo se realiza introduciendo los conceptos de campo eléctrico y campo magnético, denotados como $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ respectivamente. Estos campos son entidades vectoriales que dependen del tiempo y cambian de valor punto a punto en el espacio y son generados por las **cargas eléctricas** fuente. En el vacío, éstos deben satisfacer las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

La combinación de estas ecuaciones conduce a las expresiones independientes para las componentes de los campos eléctrico y magnético:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2},$$

en donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

3.1 Solución de Onda Plana

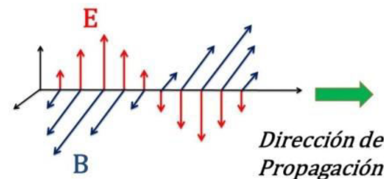
Consideremos el estado de polarización de onda plana ilustrado en el diagrama adjunto. En este caso, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ está orientado en la dirección X, el campo magnético está orientado en la dirección Y y la dirección de propagación de la onda es paralela al eje Z. Las ecuaciones correspondientes a esta configuración son:

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_Y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_Y}{\partial t^2}.$$

Una solución al sistema de ecuaciones anterior puede representarse matemáticamente como ($kc = \omega$):

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_{0X}e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{U_X} \equiv E_{0X}\cos(kz-\omega t)\,\boldsymbol{U_X};$$

$$\boldsymbol{B}(z,t) = B_{0Y}e^{i(kz-\omega t)}\boldsymbol{U_Y} \equiv B_{0Y}\cos(kz-\omega t)\,\boldsymbol{U_Y};$$



Esta solución corresponde a la solución de onda plana: La dirección del campo eléctrico es perpendicular al campo magnético en todo instante de tiempo y en todos los puntos que

configura el patrón ondulatorio. Ambos vectores están orientados en dirección perpendicular al vector de onda **k**, cuya orientación está definida por el producto $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$. La relación explícita entre los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ se obtiene desde las leyes de inducción electromagnética de (i) Faraday-Henry y (ii) la ley de Circulación de Ampère-Maxwell. En forma diferencial, estas relaciones pueden escribirse según la geometría seleccionada como:

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial E_X}{\partial z}=-\frac{\partial B_Y}{\partial t},\qquad \frac{\partial E_X}{\partial y}=0.\quad \text{(ii)}\quad -\frac{\partial B_Y}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_X}{\partial t},\qquad \frac{\partial B_Y}{\partial x}=0.$$

Las soluciones para $\boldsymbol{E}(z,t)$ y $\boldsymbol{B}(z,t)$ conducen a una relación para las amplitudes de los campos eléctrico y magnético asociados a la onda plana. Desde la ecuación (ii) se obtiene $kB_{0Y}=\omega E_{0X}/c^2$, mientras que si utilizamos la expresión (i) $kE_{0X}=\omega B_{0Y}$, el cual es idéntica a la ecuación inmediatamente anterior si se considera que $kc=\omega$. Una forma equivalente involucra directamente la velocidad de la luz en el vacío c: $E_{0X}/B_{0Y}=c$. Esta ecuación proporciona la relación de las amplitudes de los campos cuando el plano de polarización de la onda (plano en el cual oscila el campo eléctrico) está definido por XZ.

FÓRMULAS IMPORTANTES, ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ecuación de Onda EM (E, B)	$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2 B_Y}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_Y}{\partial t^2}$
Vector de Poynting (W/m²)	$\vec{\wp}=c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}$
Intensidad Media de una onda EM (W/m²)	$\langle I\rangle=\frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$
Densidad de Energía (J/m³)	$u_E=u_B=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$
Presión de Radiación (Pa)	$p_{rad}=\langle I\rangle/c$

EJEMPLOS: ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

PR 3.1. Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por:

$$\boldsymbol{B}(z,t) = (10^{-8}\text{T})\cos(kz - \omega t)\,\widehat{U}_X.$$

Hallar (a) La longitud de onda. (b) La dirección de propagación de la onda. (c) El vector campo eléctrico $\boldsymbol{E}(z,t)$. (d) Vector de Poynting y la intensidad media de esta onda.

R. (a) $\lambda = c/f = 3$ m. (b) La onda se propaga en dirección +Z. (c) Campo eléctrico: (Amplitud $E_0 = cB_0 = 3$ V/m).

$$\boldsymbol{E}(z,t) = (3\text{ V/m})\cos(kz - \omega t)\,(-\widehat{U}_Y).$$

(d) Vector de Poynting instantáneo:

$$\boldsymbol{S} = c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = c^2\varepsilon_0 E_0 B_0\cos^2(kz-\omega t)\,\widehat{U}_Z = c\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kz-\omega t)\,\widehat{U}_Z.$$

Intensidad media:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 0.012\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

3.1 *Demostrar que* $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ tiene unidades de velocidad (m/s) en el sistema S.I.
R. ε_0 corresponde a la permeabilidad eléctrica del vacío, en unidades de Faradios/metro (F/m), mientras que la permeabilidad magnética μ_0 tiene unidades de Teslas-metro/Amperio. Específicamente: [C]: Unidad de carga eléctrica, (Coulombs), Corriente Eléctrica (Amperios):

[A]= C/s

[F] = [C/V], [T] = [V s/m^2]

Por lo tanto:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}\cdot\dfrac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}\cdot\dfrac{\text{V}\cdot\text{s}^2}{\text{C}\cdot\text{m}}}} = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

3.2 *Parámetros del campo EM.* El campo eléctrico de una onda electromagnética plana tiene una amplitud de 10^{-2} V/m. Encontrar: (a) El módulo del campo magnético. (b) La densidad de energía de la onda. (c) Si la onda es completamente *absorbida* cuando incide sobre un cuerpo, determinar la presión de radiación.

(a) $B_0 = {}^{E_0}\!/_{c} = 3.3\times10^{-11}$ T.
(b) $u_E = \varepsilon_0 E_0^2 = 8.85\times10^{-16}$ J/m^3.

(c) Presión de Radiación/ Superficie absorbente:

$$p_{rad} = \langle I \rangle / c = 4.42 \times 10^{-16} \ \mathrm{N/m^2}$$

3.3 *Eficiencia Lumínica.* Suponer que una lámpara de 100 W y 80% de eficiencia irradia toda su energía en forma isótropa. Calcular la amplitud de los campos eléctrico y magnético a 2 m de la lámpara.

R. La energía que emite la lámpara en forma de **calor** corresponde a una potencia de 80 W (80% de eficiencia) mientras que 20% restante se emite en forma de **Radiación Electromagnética**. A dos metros de la lámpara, un observador puede detectar una intensidad:

$$\langle I \rangle = {P}/{4\pi r^2} = 0.398 \ \mathrm{W/m^2}.$$

La amplitud del campo eléctrico a esa distancia se obtiene desde:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle I \rangle}{c\varepsilon_0}} = 17.31 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

La amplitud del campo magnético está definido por:

$$B_0 = {E_0}/{c} = 5.77 \times 10^{-8} \ \mathrm{T}.$$

3.4 *Una onda EM armónica* que se propaga en un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 MHz y una velocidad de propagación de 2.5×10^8 m/s. (a) Calcular la distancia mínima en cierto instante, entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60°. (b) Calcular la diferencia de fase de oscilación, en cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^{-9} s.

(a) La diferencia de fase es (en cierto instante)

$$k\Delta x = 60° = \frac{\pi}{3}.$$
$$\Delta x = \frac{\pi}{3k} = \frac{\lambda}{6} = \frac{v}{6f} = 0.083 \ \mathrm{m}$$

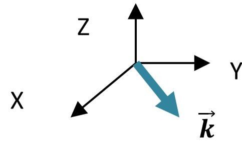
(b) En cierto punto, la diferencia de fase es

$$\omega \Delta t = 2\pi f \Delta t = \pi \ (180°).$$

3.5 *Un haz de luz con longitud* de onda de 630 nm incide de manera normal en un espejo. La luz reflejada interfiere con la luz incidente para formar una onda estacionaria que tiene un nodo sobre su superficie. (a) Qué tan lejos del espejo está el antinodo más cercano? (b) cuántos nodos hay desde el espejo hasta una distancia de 1 mm?

R. (a) La distancia entre un nodo y un antinodo consecutivo es $\lambda/4 = 157.5$ nm. (b) Por cada 315 nm existen dos nodos. En una distancia de 1 mm (10^6 nm), existen 3,174 semi-longitudes de ondas o nodos.

3.6 *Onda Electromagnética Plana*. Una onda luminosa plana sinusoidal con polarización lineal y longitud de onda $\lambda = 5{,}0 \times 10^{-7}$m (luz verde) se propaga en el vacío. La intensidad media es 10^{-1} W/m^2. La dirección de propagación está en el plano XY a un ángulo de 45° con respecto al eje X. El campo eléctrico oscila paralelo al eje Z. Escribir las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético de esta onda.



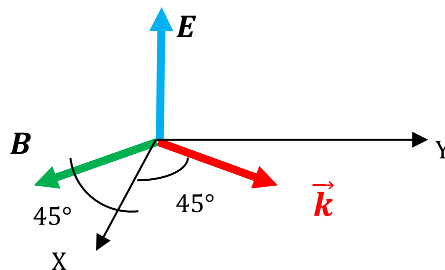
R. El campo eléctrico está polarizado en la dirección Z y el vector de propagación tiene componentes en X y Y definidas por:

$$\vec{k} = k_X\boldsymbol{i} + k_Y\boldsymbol{j} = k(\cos(45°)\boldsymbol{i} + \sin(45°)\boldsymbol{j}) = k(\sqrt{2}\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j})/2.$$

La magnitud del vector $\vec{k}$ se obtiene desde la longitud de onda: $k = 2\pi/\lambda$, es decir: 12.56×10^6 (m^{-1}). La frecuencia de la onda es: $\omega = kc = 3.77 \times 10^{15}$ rad/s. Si la intensidad media de la onda $\langle I \rangle$ está definida por 0.1 W/m^2, la amplitud del campo eléctrico asociado es:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle I \rangle}{c\varepsilon_0}} = 8.68\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

La amplitud del campo magnético es: 2.89×10^{-8} T. Finalmente, la ecuación para el campo eléctrico se escribe como: $\boldsymbol{E}(x, y, t) = 8.68 \sin(8.88 \times 10^6(x + y) - 3.77 \times 10^{15}\ t)\mathbf{k}$ V/m. El campo magnético está en la dirección tal que el producto vectorial con el campo eléctrico **E** es paralelo al vector de propagación $\vec{k}$. Veamos la figura:



el frente de onda está formado por los vectores **E** y **B**, en donde **B** debe ser perpendicular al vector **E** y $\vec{\boldsymbol{k}}$ **simultáneamente**. Es claro entonces que **B** yace en el plano XY y forma un ángulo de 45° con el eje X y apunta en sentido negativo de las Y. En unidades del SI, entonces:

$$\boldsymbol{B}(x, y, t) = 2.89 \times 10^{-8} \sin(8.88 \times 10^6(x + y) - 3.77 \times 10^{15}\ t)\ (\sqrt{2}\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\boldsymbol{j})/2.$$

PR 3.2. Un láser dispara pulsos de 1000 MW y 200 ns de duración sobre un objeto pequeño de 10 mg de masa suspendido mediante una fibra muy fina de 4 cm de longitud. Si la radiación se absorbe por competo sin otros efectos, estimar el máximo ángulo de desviación de este péndulo.

R. La energía de la radiación electromagnética suministrada al péndulo puede estimarse multiplicando la potencia y el tiempo de duración del pulso:

$$\langle E\rangle = 1000\times 10^{6}\times 200\times 10^{-9} = 200 \text{ J}.$$

La presión de radiación que experimenta el objeto, considerando absorción total es:

$$p_{rad} = \frac{\langle I\rangle}{c} = \frac{\langle P\rangle}{Ac},$$

con A como el área efectiva del sistema. La fuerza media que el péndulo experimenta es del orden de

$$p_{rad}A = \frac{\langle P\rangle}{c} = F.$$

La cantidad de movimiento inducida sobre el cuerpo es:

$$F\Delta t = mv_0 = \frac{\langle P\rangle\Delta t}{c} = \frac{\langle E\rangle}{c}.$$

La velocidad imprimida al péndulo está relacionada con la amplitud de oscilación (Ver **PR 1.4.**):

$$v_0 = \frac{\langle E\rangle}{mc} = \sqrt{gl}\theta_0,$$

$$\theta_0 = \frac{\langle E\rangle}{mc\sqrt{gl}} = 10^{-4}\text{rad } (0.0061°).$$

3.7 *Un resistor* consiste en un cilindro sólido de radio r y longitud L. La resistencia del resistor es R y conduce una corriente I. Calcular la potencia irradiada fuera de la superficie del resistor.

R. La magnitud del campo magnético en la superficie del resistor es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

mientras que el campo eléctrico en magnitud puede estimarse como:

$$E = \frac{V}{L} = \frac{IR}{L}.$$

Los vectores B y E son perpendiculares. La magnitud del vector de Poynting es (cuyo vector es perpendicular a la superficie del cilindro):

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{I^2R}{2\pi rL},$$

y la potencia irradiada se obtiene integrando el vector de Poynting sobre la superficie del conductor:

$$P = \int \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{A} = I^2 R.$$

3.8 *Radiación Solar.* Suponiendo que la radiación electromagnética procedente del Sol se puede considerar como una onda plana armónica, cuyo campo magnético tiene una amplitud de 3.42×10^{-6} T en la superficie terrestre. Calcular la cantidad de energía que incide al mediodía, durante 10 minutos, sobre la superficie del agua de una piscina de 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de profundidad.

R. La intensidad promedio de la onda incidente puede obtenerse desde la ecuación:

$$\langle I \rangle = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} = 1.4 \ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}.$$

En una superficie rectangular de 20m x 5m (100 m^2) en 10 min (600 seg.), la cantidad de energía que incide puede estimarse como:

$$\langle E \rangle = \langle I \rangle At = 84 \times 10^6 \text{ J}.$$

3.9 *Una onda electromagnética* se propaga en un medio transparente (no magnético) y su campo eléctrico **E** en unidades S.I. está dado por:

$$E_X = 0; \quad E_Y(x,t) = 30 \sin\left[2\pi\left(5 \times 10^9 t - \frac{x}{4 \times 10^{-3}}\right)\right]; \;\; E_Z = 0.$$

(a) Determinar la frecuencia, periodo y fase inicial del campo **E**. (b) Escribir la expresión del campo magnético **B** asociado con el campo eléctrico de la onda en este medio. (c) Obtener la magnitud del vector de Poynting si la onda se propaga en el vacío con las amplitudes de los campos calculadas en los ítems (a) y (b).

R. (a) Frecuencia: $f = 5 \times 10^9$ Hz. Periodo: $T = 1/f = 2 \times 10^{-10}$ s. Fase inicial: cero. (b) La dirección de propagación de la onda es +X, la dirección del campo magnético es: $v = 2.0 \times 10^7$ m/s.

$$B_Z(x,t) = 1.5 \times 10^{-6} \sin\left[2\pi\left(5 \times 10^9 t - \frac{x}{4 \times 10^{-3}}\right)\right] \text{ (T)}.$$

(c) Magnitud del vector de Poynting (vacío):

$$\wp = c^2 \varepsilon_0 E_0 B_0 = 35.84 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

3.10 *Presión de Radiación.* La intensidad de una fuente de luz brillante es de 935 W/m². Encuentre la presión de radiación media (en Pascales) sobre una superficie ***completamente reflectora***.

R. En una superficie completamente reflectora, la presión de radiación se define como:

$$P_{rad} = \frac{2\langle I \rangle}{c} = 6.23 \times 10^{-6} \text{ Pa}.$$

3.11 *Potencia de Radiación.* La potencia media de una estación difusora es de 10^4 W. Suponiendo que la potencia se irradia uniformemente sobre cualquier semiesfera con centro en la estación, encontrar el módulo (magnitud) del vector de Poynting y las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en un punto a 5 km de la fuente. Suponer que a esta distancia el frente de la onda es plano.

R. El campo eléctrico asociado a esta onda, a una distancia de 5 km es:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2P}{2\pi r^2 c\varepsilon_0}} = 0.22 \text{ V/m}$$

El campo magnético $B_0 = E_0/c = 7.33 \times 10^{-10}$ T. El módulo del vector de Poynting:

$$|\boldsymbol{S}| = c^2\varepsilon_0 E_0 B_0 = 1.28 \times 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

3.12 *Luz Láser I.* Un láser emite una onda electromagnética senoidal de 4×10^{13} Hz. La onda se propaga en el vacío en dirección $+y$, **B** oscila en dirección x y tiene una amplitud de 7.30×10^{-4} T. Escribir las ecuaciones vectoriales para **E** y **B**.

R. El número de onda asociado es $k = 2\pi f/c = 8.38 \times 10^5$ m^{-1}. El campo eléctrico se escribe como:

$$\mathbf{E}(y,t) = (2.2 \times 10^5)\sin[8.38 \times 10^5 y - 25.13 \times 10^{13} t]\ \frac{\text{V}}{\text{m}}(\mathbf{k}),$$

mientras que el campo magnético toma la forma:

$$\mathbf{B}(y,t) = (7.3 \times 10^{-4})\sin[8.38 \times 10^5 y - 25.13 \times 10^{13} t]\ (\text{T})(\mathbf{i}).$$

3.13 *El campo eléctrico* de una onda electromagnética en el vacío está dado por:

$$\boldsymbol{E} = 31\left(\frac{V}{\text{m}}\right)\cos[1.8y + 5.4 \times 10^8 t]\ \boldsymbol{U_X}.$$

(a) Escribir una expresión del campo magnético de la onda. (b) Calcule la intensidad promedio asociada a la onda.

R. (a) El campo magnético está dado por: $\boldsymbol{B} = 103.3(\text{nT})\cos[1.8y + 5.4 \times 10^8 t]\ \boldsymbol{U_Z}$. (b) La intensidad promedio de la onda es: $\langle I \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2/2 = 1.28$ W/m^2

3.14 *Luz Láser II*. Un láser de Helio-Neón emite luz roja visible con una potencia de 360 mW en un haz que posee un diámetro de 4.0 mm. (a) Cuál es la amplitud de los campos magnético y eléctrico de la luz?. (b) Cuál es la densidad media de energía asociada a estos campos?. (c) Cuál es la energía total contenida en una longitud de 0.5 m del haz? (a) La potencia promedio del Láser y la intensidad se relacionan a través de la expresión: $\langle I \rangle = P/A$. A representa el área transversal del haz: $A = \pi r^2, r = 2$ mm. La intensidad promedio y la amplitud del campo eléctrico están conectadas a través de la relación $E_0 = \sqrt{2\langle I \rangle / c\varepsilon_0}$. Combinando estas dos expresiones, es posible obtener el valor de la amplitud del campo eléctrico:

$$E_0 = 4.6 \frac{\text{kV}}{\text{m}}, \quad B_0 = 15.3\ \mu\text{T}.$$

La densidad media de energía asociada a los campos es:

$$u_E = u_B = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = 9.36 \times 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

(c) La energía total contenida en un volumen V es: $U = u_T V = 1.17 \times 10^{-9}$ J.

3.15 *Orden de magnitud de la presión debido a la radiación electromagnética.* La potencia promedio en el haz de un láser es 4.3 mW y tiene una intensidad uniforme dentro de su haz de 1.2 mm de radio. Suponga que el haz incide de manera normal sobre una superficie absorbente. a) Cuál es la presión que ejerce el haz sobre la superficie que incide? b) Qué fuerza ejerce el haz sobre la superficie?

R. a) La presión se obtiene como la intensidad media del haz láser sobre la superficie dividida en la velocidad de la luz:

$$p = \frac{\langle I \rangle}{c} = \frac{\text{Potencia/Area}}{c} = \frac{P}{Ac} = \frac{P}{\pi R^2 c} = 3.17 \times 10^{-6} \text{ Pa}.$$

b) La fuerza ejercida por el haz sobre la superficie es: $F = pA = 1.433 \times 10^{-11}$ N.

PR 3.3. Una onda electromagnética de 200 W/m^2 incide formando un ángulo de 30° con respecto a la normal sobre una cartulina reflectante de 20 × 30 cm^2. Calcular la fuerza sobre ejercida por la onda electromagnética.

R. La presión de radiación sobre una superficie reflectora:

$$p = \frac{2\langle I \rangle}{c} \cos\theta.$$

La fuerza neta sobre el área: $F = (2\langle I \rangle A/c)\cos\theta = 6.93 \times 10^{-8}$ N.

3.16 *Luz Monocromática.* Una fuente de luz monocromática (i.e., su longitud de onda es única) de 75 W irradia ondas electromagnéticas sinusoidales uniformemente en todas las direcciones. A qué distancia de la fuente la amplitud del campo eléctrico es de 0.430 V/m?
R. En este caso, el área a considerar corresponde al área de una esfera de radio r: $4\pi r^2$, y la relación con la potencia emitida por la fuente es:

$$r = \sqrt{\frac{2P}{4\pi c E_0^2 \varepsilon_0}} = 156 \text{ m}.$$

A una distancia de 156 m desde una fuente puntual de 75 W, la amplitud del campo eléctrico asociado a la onda electromagnética es del orden de 0.430 V/m.

3.17 Interferencia. En la pantalla de un televisor se forman imágenes dobles o fantasmas cuando la señal del transmisor llega al receptor de forma directa e indirecta simultáneamente, después de haberse reflejado en un edificio o en cualquier otra estructura metálica grande. En un aparato de televisión de 25 pulgadas, la doble imagen está aproximadamente 1 cm a la derecha de la imagen principal si la señal reflejada llega 0.6 μs

después de la señal principal. Calcular la diferencia en las longitudes de las trayectorias para las dos señales.

R. La señal de la imagen "fantasma" experimenta un retardo de 0.6 microsegundos con respecto a la señal original. Si consideramos que el campo que transporta la señal obedece una relación del tipo: $E_{original}(x,t) = E_0 \sin[kx - \omega t]$, la señal del campo *fantasma* alcanzará el receptor en un tiempo posterior $t + \Delta t$, aproximadamente con la misma amplitud, después de reflejarse en algún obstáculo metálico. Así, la señal "fantasma" tiene la forma:

$$E_{fantasma}(x,t) = E_0 \sin[k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)],$$

en donde Δx se considera como la distancia *adicional* que recorre la onda antes de llegar al receptor. Cuando la señal fantasma y la señal original actúan en sincronismo, los factores de fase son los mismos, i.e.:

$$k\Delta x - \omega \Delta t = 0,$$

$$\Delta x = \frac{\omega \Delta t}{k} = 180 \text{ m}.$$

La onda fantasma debe recorrer unos **180 m** adicionales antes de alcanzar la antena del receptor y así producir el mismo tipo de señal sobre el televisor. Las dimensiones y el desplazamiento de la imagen fantasma con respecto a la imagen original son datos irrelevantes en este caso, y dependen sólo de cómo éstas sean procesadas.

PR 3.4. Un hilo muy largo de 4 mm de radio se calienta a 1000 K. Su superficie es un radiador negro ideal. (a) Cuál es la potencia total radiada por unidad de longitud?. (b) Hallar el vector de Poynting, (c) los campos eléctricos y magnéticos efectivos a 25 cm del hilo.

R. (a) A 1000 K, la radiación del cuerpo negro emite una energía con intensidad

$$I = \sigma T^4,$$

en donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 K^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann. A 1000 K, $I = 56.7 \times 10^3$ W/m^2. La potencia total irradiada por unidad de longitud del cuerpo es $P = 2\pi r I = 1.425$ W/m. (b) La intensidad de la radiación a 25 cm del hilo (las áreas en coordenadas cilíndricas):

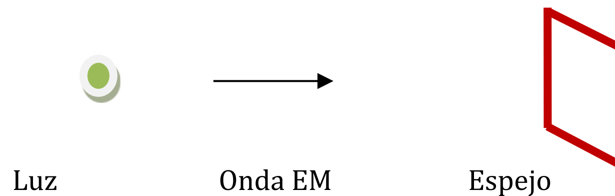
$$\langle I' \rangle = I\left(\frac{2\pi r L}{2\pi R L}\right) = 907.2 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \langle S \rangle.$$

(c) El campo eléctrico:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle I' \rangle}{c\varepsilon_0}} = 826.7 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

mientras que el campo magnético $B_0 = E_0/c = 2.76$ μT.

3.18 *Presión de radiación en una superficie totalmente reflectora.* Un espejo pequeño de área $A = 6$ cm² está frente a una fuente de luz situada a 4 m. La amplitud del campo eléctrico en la superficie del espejo es de 0.0350 V/m. (a) Cuánta energía incide en el espejo en 1 s? (b) Cuál es la presión de radiación media ejercida por la luz en el espejo? (c) Cuál es la potencia total de radiación de la fuente si se supone que radia uniformemente en todas las direcciones?



R. (a) La energía que incide en 1 s sobre el área del espejo (potencia) puede obtenerse de la relación de intensidad:

$$P = \langle I \rangle A = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} A = 9.76 \times 10^{-4} \text{ W}.$$

(b) Si consideramos la superficie como un reflector perfecto, la presión de radiación absorbida se define como:

$$PRESION_{Radiación} = \frac{2\langle I \rangle}{c} = \frac{2P}{cA} = 1.08 \times 10^{-14} \text{ Pa}.$$

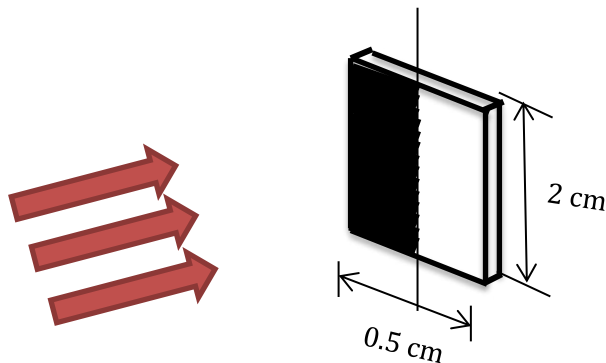
c) Para una fuente de luz ubicada a 4 m, la potencia de radiación es:

$$P = \langle I \rangle A = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} A = 3.27 \times 10^{-4} \text{ W}.$$

3.19 *Onda Electromagnética Estacionaria.* Una onda electromagnética estacionaria en cierto material oscila a una frecuencia $f = 2.0 \times 10^{10}$ Hz. Los planos nodales de $\boldsymbol{B}$ están separados 4.0 mm. Calcule: (a) La longitud de onda en este material. (b) La distancia entre planos nodales adyacentes del campo $\boldsymbol{E}$. (c) La rapidez de propagación de la onda.

R. (a) Si los planos nodales consecutivos están separados 4.0 mm, esta distancia corresponde efectivamente a la mitad de una longitud de onda en el material. La longitud de onda es igual a 8 mm. (b) La distancia entre planos nodales asociadas al campo eléctrico es la misma que para el campo magnético, i.e., 4.0 mm. Los campos oscilan en fase. (c) La rapidez de propagación de la onda es $v = 0.008 \times 2.0 \times 10^{10} = 1.60 \times 10^{8}$ m/s.

PR 3.5. Una superficie rectangular rígida y muy delgada de 2 cm × 0.5 cm se fija sobre un eje vertical. La mitad de cada lado se pinta de negro y absorbe por completo la luz, mientras que la otra mitad es de metal lustroso y reflector. La parte posterior de cada mitad es distinta de la frontal. Despreciar los efectos de la fricción en el eje. Sobre el aparato incide un haz de luz colimado cuyo vector de Poynting tiene una magnitud de 1.0×10^{-3} kg/s³, y se propaga perpendicularmente al eje vertical. Calcular (si existe) el par neto sobre la superficie del rectángulo.



EJERCICIO PR 3.5

R. Si el rectángulo puede rotar sin fricción alrededor del eje vertical, se producirá un par torsión debido a que la fuerza neta sobre cada lado de la superficie es de diferente magnitud. En el lado oscuro, la radiación ejerce una presión igual a:

$$p_O = \frac{\langle I \rangle}{c}.$$

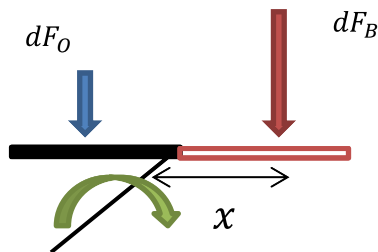
Sobre el lado brillante, la presión es:

$$p_B = \frac{2\langle I \rangle}{c}.$$

El diferencial de fuerza sobre cada lado de la superficie puede estimarse como:

$$dF_O = \frac{\langle I \rangle l dx}{2c}, \quad dF_B = \frac{\langle I \rangle l dx}{c};$$

en donde $A = lw$ es el área total del rectángulo y ldx corresponde al diferencial de área sobre la cual actúa la presión. El diferencial de torque puede definirse en forma escalar como: $d\tau = xdF$, siendo x la distancia perpendicular al eje de rotación.



Sobre el lado brillante:

$$\tau_B = \int_0^{w/2} x dF_B = \frac{\langle I \rangle l}{c} \int_0^{w/2} x dx = \frac{\langle I \rangle l w^2}{8c}.$$

Sobre el lado oscuro:

$$\tau_O = \int_0^{w/2} x dF_O = \frac{\langle I \rangle l}{2c} \int_0^{w/2} x dx = \frac{\langle I \rangle l w^2}{16c}.$$

El torque neto puede estimarse como:

$$|\tau_N| = |\tau_B - \tau_O| = \frac{\langle I \rangle A w}{16c} = 1.04 \times 10^{-17} \mathrm{N \cdot m}.$$

Tomando la magnitud del vector de Poynting (promedio) como la intensidad de la radiación. Esta magnitud pareciera muy pequeña para lograr rotación de un sistema mecánico de estas dimensiones.

3.20 *En una red de telefonía celular*, una onda electromagnética senoidal emitida por una antena de microondas tiene $\lambda = 5.20$ cm y una amplitud del campo eléctrico de 4.50×10^{-2} V/m a 3 km desde la antena. a) Cuál es la frecuencia de la onda?. b) La amplitud del campo magnético? c) La intensidad de la onda?

R. a) La frecuencia de la onda se obtiene por la relación: $f = c/\lambda = 5.77 \times 10^9$ Hz.
b) La amplitud del campo magnético es: $B = E/c = 1.50 \times 10^{-10}\ T$.
c) La intensidad media de la onda que llega al receptor es:

$$\langle I \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2/2 = 2.69 \times 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}.$$

3.21 *Una onda electromagnética* armónica plana en el aire tiene una longitud de onda de 4.25 cm y una amplitud de 0.840 V/m. (a) Cuál es la frecuencia?. (b) Cuál es la amplitud de $\boldsymbol{B}$? (c) Cuál es la intensidad? (d) Cuál es la fuerza media que ejerce esta radiación sobre una superficie totalmente absorbente de 0.50 metros cuadrados de área perpendicular a la dirección de propagación?.

R. (a) Aproximando la velocidad de propagación de la onda en el aire como c, la frecuencia se calcula como: $f = c/\lambda = 7.05 \times 10^9$ Hz. (b) La amplitud del campo magnético es $B = E/c = 2.8$ nT. (c) Su intensidad es $\langle I \rangle = c\varepsilon_0 E^2/2 = 9.36 \times 10^{-4}$ W/ m^2. (d) La fuerza sobre una superficie de 0.5 metros cuadrados se obtiene desde la expresión para la presión de radiación asociada a esta onda: $F = PA = \langle I \rangle A/c = 1.56 \times 10^{-12}$N.

3.22 *Polarización de una Onda EM.* Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por $\boldsymbol{B}(y,t) = (4.38 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}) \sin(\omega t + 7.45 \times 10^4 y)\boldsymbol{U_X}$. Escriba una ecuación vectorial para el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(y,t)$.
R. Es claro que el campo electromagnético se propaga en dirección $-Y$. Un diagrama simple de los estados de polarización de los campos se ilustra en la siguiente figura:



El campo eléctrico posee dirección Z, y su fórmula vectorial puede escribirse como:

$$\boldsymbol{E}(y,t) = \left(13.14\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)\sin(\omega t + (7.45\times10^4)y)(-\boldsymbol{U_Z}).$$

3.23 *El Sol* emite energía en forma de ondas electromagnéticas a razón de 3.9×10^{26} W. Esta energía es producida por reacciones nucleares en el centro del Sol. a) Encuentre la intensidad de la radiación y su presión sobre un objeto absorbente en la superficie (radio $r = R$). Considere el radio del Sol como 6.96×10^{8} m. b) Calcular la intensidad de la radiación sobre la superficie terrestre.

a) Sobre la superficie del Sol, la intensidad promedio de la radiación se estima como:

$$\langle I\rangle = \frac{P}{Area} = \frac{3.9\times10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi(6.96\times10^{8})^2\mathrm{m}^2} = 64.1\times10^{6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

La presión sobre un objeto absorbente es: $\langle I\rangle/c = P_r = 0.214$ Pa.

b) En la superficie terrestre, considerando que la distancia Tierra – Sol en promedio es 150 millones de kilómetros:

$$\langle I\rangle = \frac{P}{Area} = \frac{3.9\times10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi(1.5\times10^{11})^2\mathrm{m}^2} = 1.379\times10^{3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

La intensidad sobre la superficie terrestre es menor en tres órdenes de magnitud comparada con aquella intensidad de la radiación emitida en la superficie del Sol.

3.24 *Atenuación de una onda electromagnética.* Calcular la atenuación en dB/m, para una onda plana uniforme de 1 MHz en agua de mar. Suponga que la permitividad dieléctrica relativa del agua de mar $\varepsilon_r = 78$ y la conductividad $\sigma = 4\ (\Omega\mathrm{m})^{-1}$.

R. El coeficiente de atenuación α es utilizado para cuantificar el decrecimiento de la amplitud de las ondas como función de la frecuencia en diferentes medios. Este coeficiente puede ser utilizado para determinar la atenuación total en dB en el medio, utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{Atenuación} = \alpha\left[\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{MHz\ cm}}\right]\cdot \ell[\mathrm{cm}]\cdot \mathrm{f}[\mathrm{MHz}]$$

La expresión final para el coeficiente de atenuación se obtiene calculando la componente imaginaria del número de onda asociado a la onda electromagnética que se propaga en el medio:

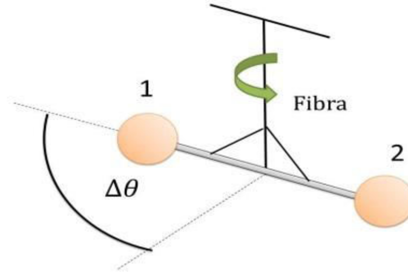
$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right)}.$$

En las unidades específicas, la atenuación es (con $\mu = 4\pi\times10^{-7}\mathrm{A}\cdot\mathrm{m/T}$): $\alpha = 6.32\times10^{-7}\mathrm{dB/(MHz\ m)}$.

3.25 *Una bombilla de 100* W convierte alrededor del 5% de su potencia en radiación visible. a) Cuál es la intensidad promedio de la radiación visible a una distancia de 1 m de la bombilla?, y a una distancia de 10 m?. Suponer que la radiación se emite en forma isotrópica y desprecie las reflexiones.

R. La radiación visible tiene una potencia de 5 W. a) La intensidad promedio es $\langle I\rangle = P/A = 5/4\pi(1^2)\ (\mathrm{W/m^2}) = 0.397\ \mathrm{W/m^2}$. b) $\langle I\rangle = 0.00397\ \mathrm{W/m^2}$.

3.26 *Balanza de Torsión.* Considere una balanza de torsión utilizada para medir presión de radiación. Dos espejos de forma circular, cada uno de área A y separados sus centros del eje central por una distancia L, se conectan mediante una barra horizontal suspendida de una fibra. El momento de torsión cuando la fibra se gira un ángulo $\Delta\theta$ es $\tau = \kappa\Delta\theta$, en donde κ es la constante de torsión de la fibra. Sobre el espejo 1 incide luz con una intensidad $\langle I\rangle$, mientras que el espejo 2 está en la sombra. La balanza alcanza su posición de equilibrio después de girar un ángulo $\Delta\theta$. Hallar el ángulo en términos de los parámetros conocidos $\langle I\rangle, \kappa, L, A$.



R. La presión de radiación sobre una superficie perfectamente reflectora se obtiene desde la intensidad media de la radiación electromagnética como:

$$p = \frac{2\langle I\rangle}{c},$$

en donde c es la velocidad de la luz. La fuerza sobre un espejo de área A es:

$$F = pA = \frac{2\langle I\rangle A}{c},$$

mientras que el par torsión sobre la fibra se obtiene directamente como:

$$\tau = FL = \frac{2\langle I\rangle AL}{c} = \kappa\Delta\theta.$$

El ángulo de giro del sistema finalmente es directamente proporcional a la intensidad de la radiación e inversamente proporcional a la constante de torsión de la fibra.

$$\frac{2\langle I\rangle AL}{\kappa c} = \Delta\theta.$$

3.27 Radiación cósmica de fondo de microondas llena todo el espacio con una densidad de energía promedio de $4\times10^{-14}\ \mathrm{J/m^3}$. (a) Hallar los valores ***rms*** del campo eléctrico asociado a esta radiación. (b) Qué tan lejos de una estación de radio de 10 kW que emite uniformemente en todas las direcciones se encontrará un valor similar?

R. (a) La relación entre densidad de energía y amplitud del campo eléctrico es:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2u}{\varepsilon_0}} = 95.1\ \frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}.$$

El valor *rms* es: $E_0/\sqrt{2} = 67.22\ \mathrm{mV/m}$. (b) Utilizamos la expresión:

$$r = \sqrt{\frac{2P}{4\pi c E_0^2 \varepsilon_0}},$$

en donde P es la potencia de la fuente en el origen y E_0 corresponde a la amplitud del campo eléctrico en la posición r desde la fuente. Reemplazando los datos numéricos, $r = 8.1$ km.

3.28 El campo magnético de una onda viajera tiene una amplitud *rms* de 10 nT. Cuánto tiempo le tomaría a esta onda transportar una energía de 100 J hacia una pared de 1 cm^2, incidiendo normalmente?.

R. La potencia media asociada a una onda EM en el vacío es:

$$P = \langle I \rangle A = \frac{1}{2\mu_0} c B_0^2 A = \frac{1}{\mu_0} c B_{rms}^2 A = \frac{3}{4\pi} \times 10^{-7} \text{ W}.$$

Una energía promedio de 100 J transferida a una superficie de 1 cm^2 tomará un tiempo aproximado de $t = E/P = 418 \times 10^7$s, (485 días~ 1.33 años).

3.29 Un láser de 200 W produce un haz de área de sección transversal de 1 mm^2 y longitud de onda de 628 nm. Cuál es la amplitud del campo eléctrico en el haz?.

R. La intensidad promedio del haz es:

$$\langle I \rangle = \frac{P}{A} = 200 \times 10^6 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

El campo eléctrico se obtiene desde

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle I \rangle}{c\varepsilon_0}} = 3.88 \times 10^5 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

La amplitud del campo eléctrico no depende explícitamente de la longitud de onda.

3.30 Dos astronautas están en reposo en el espacio exterior, uno a 20 m del transbordador espacial, y el otro, a 40 m. Usando un láser 100 W, el astronauta que está a 40 m decide propulsar al otro hacia el transbordador enfocando el láser sobre un trozo de metal totalmente reflectante del traje espacial. Si la masa total del astronauta con equipo es 100 kg, en cuanto tiempo alcanzará el transbordador?.
R. El astronauta de desplazará con movimiento uniformemente acelerado

$$a = \frac{F}{M} = \frac{pA}{M} = \frac{2\langle I \rangle A}{cM};$$

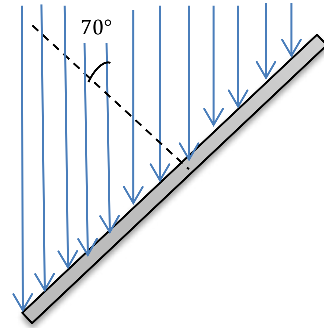
en donde p es la presión de radiación electromagnética sobre la superficie totalmente reflectora de área A. El producto $\langle I \rangle A$ corresponde a la potencia asociada al láser. La posición del astronauta en función del tiempo es:

$$x(t) = d - \frac{\langle I \rangle A}{cM} t^2,$$

siendo d es la posición inicial del cuerpo. El tiempo requerido para alcanzar el trasbordador es:

$$t = \sqrt{\frac{cMd}{\langle I \rangle A}} = 21.52 \text{ hrs.}$$

3.31 Cuál es la presión de radiación debida a la luz solar que incide sobre una superficie perfectamente absorbente, cuyo vector normal a la superficie forma un ángulo de 70° con respecto a la luz incidente?

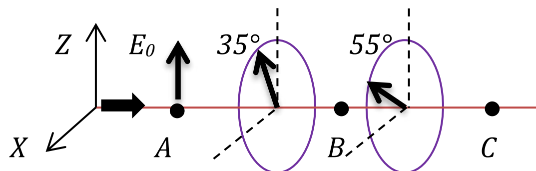


R. La intensidad de la radiación solar promedio en la superficie terrestre se estima alrededor de 1400 w/m². La presión de radiación sobre una superficie normal absorbente es

$$p = \frac{\langle I \rangle}{c} = 4.67\ \mu\text{Pa.}$$

Sobre una superficie que forma un ángulo de 70° con respecto a la dirección de propagación de la radiación, $p' = p \cos 70° = 1.60\ \mu\text{Pa}$.

3.32 Un láser produce luz polarizada en la dirección vertical. La luz se desplaza en dirección Y positiva y pasa por dos polarizadores cuyos ángulos de polarización son 35° y 55° con respecto a la vertical. El haz láser es colimado (no se hace convergente ni se expande), tiene una sección transversal circular de 1 mm de diámetro y su potencia media es de 15 mW en el punto A. Cuáles son las magnitudes de los campos eléctrico y magnético y cuál es intensidad del haz láser en el punto C?.



R. La intensidad de la luz láser disminuye una vez ésta pasa por el primer polarizador según la ley de Malus:

$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta_1.$$

Este es el valor de la intensidad media en el punto B, con $\theta_1 = 35°$. Al pasar por el segundo polarizador, con $\theta_2 = 20°$, en el punto C:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_2 = I_0 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2.$$

En el punto A, $I_0 = 19.1\ \text{kW/m}^2$. En el punto C, $I_2 = 11.3\ \text{kW/m}^2$. Las magnitudes de los campos por lo tanto son:

$$E_{0(C)} = \sqrt{\frac{2I_2}{c\varepsilon_0}} = 2.92 \times 10^3 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}, \qquad B_{0(C)} = \frac{E_{0(C)}}{c} = 973.2 \text{ nT}.$$

3.33 El vector de Poynting de una onda electromagnética plana en el vacío es (unidades S.I.):

$$\mathbf{S} = -220 \ (\text{W/m}^2) \cos^2[12z + 3.6 \cdot 10^9 t]\hat{\boldsymbol{k}}$$

(a) Cuál es la dirección de propagación?
(b) Cuál es la longitud de onda?
(c) Cuál es la frecuencia?
(d) Escriba las expresiones de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

R. (a) La onda se propaga en dirección (-*Z*). (b) La longitud de onda es $\lambda = 2\pi/k = \pi/6$ m. (c) La frecuencia $f = \omega/2\pi = 0.57 \times 10^9$ Hz. (d) Las expresiones para los campos electromagnéticos son:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos[12z + 3.6 \cdot 10^9 t]\hat{\boldsymbol{x}} \ \ (\text{V/m})$$

$$\boldsymbol{B}(z,t) = B_0 \cos[12z + 3.6 \cdot 10^9 t](-\hat{\boldsymbol{y}}) \quad (\text{T}).$$

Las amplitudes de los campos se obtienen desde la amplitud del vector de Poynting $S_0 = E_0 B_0/\mu_0$.

$$E_0 = \sqrt{c\mu_0 S_0} = 288 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 9.6 \times 10^{-7} \text{ T}.$$

3.34 Considere que una estación espacial de masa M está situada en el sistema solar y que no está en órbita alrededor del Sol, de modo que en el equilibrio la fuerza F debida a la presión de radiación, producida por la potencia P de la radiación solar, es igual y opuesta a la fuerza gravitacional debida a la masa solar M_S. Despreciar las fuerzas debidas a los planetas. a) Demuestre que el área de la superficie reflectora de la estación es:

$$A = \frac{2\pi G M_S M c}{P}.$$

b) Suponga que la superficie reflectora es un cuadrado de lado L y que la masa de la estación de 10^6 kg. La potencia irradiada por el Sol es 3.77×10^{26} W. Determine L.
R. a) La fuerza entre los dos cuerpos:

$$F = \frac{GM_S M}{R^2} = \text{presión} \times \text{área} = \frac{2\langle I \rangle}{c} \times A = \frac{2P}{4\pi R^2 c} \times A.$$

b) Despejando *A:*

$$A = \frac{2\pi G M_S M c}{P} = L^2.$$

L = 1.487 m. [$M_S = 1.988 \times 10^{30}$ kg, $G = 6.67428 \times 10^{-11}$ m^{2}N/kg^2].

PR 3.6. Qué fracción de luz inicialmente no polarizada pasa por dos hojas de *polaroid* que forman un ángulo recto entre sí?. Qué sucede si se coloca una tercera hoja entre ellas formando un ángulo de 45° con las otras dos?.
R. En el primer caso la intensidad a la salida del sistema de dos hojas es cero. En el caso de tres hojas de polaroid, la intensidad a la salida se reduce a:

$$I_S = \frac{I_0}{2} \times \cos(45°)^2 \times \cos(45°)^2 = \frac{I_0}{8}.$$

3.35 Suponga que dos ondas electromagnéticas planas con frecuencias angulares ω_1 y ω_2, ambas con amplitudes en sus campos eléctricos E_1 y E_2 paralelas al eje Y, viajan a lo largo del eje X e inciden sobre una pantalla ubicada en el plano ZY en $x = 0$. En este caso, el campo eléctrico resultante en la pantalla está dado por

$$E_r(t) = E_1 \sin(\omega_1 t) + E_2 \sin(\omega_2 t).$$

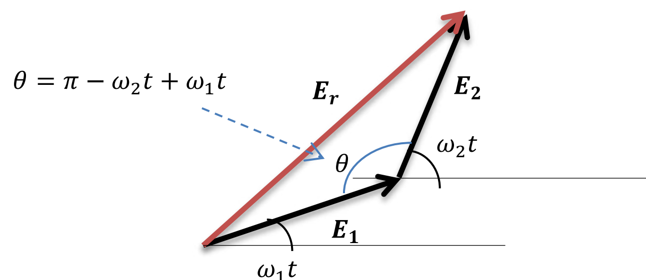
(a) Demostrar que la intensidad (instantánea) resultante sobre la pantalla es

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t],$$

en donde I_1 e I_2 son las intensidades causadas por cada onda separadamente.

(b) Utilizar el resultado en (a) para demostrar que, cuando las frecuencias de las ondas son muy diferentes (ondas incoherentes), la intensidad promedio es la suma simple de las intensidades individuales. Discutir el caso $\omega_1 = \omega_2$.

R. (a) Construimos el diagrama de fasores asociado a los dos campos eléctricos:



El teorema de los cosenos permite obtener la amplitud del campo resultante:

$$E_r = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos\theta}.$$

La intensidad de la radiación es proporcional a la amplitud del campo eléctrico: $I \sim E^2, \quad E \sim \sqrt{I}$. Reemplazando θ:

$$E_r = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}\,,$$

en donde hemos utilizado la identidad $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$. La intensidad resultante de la radiación sobre la pantalla toma la forma definitiva:

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t].$$

(b) En un periodo T, la intensidad promedio es:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_T dt = \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle + \frac{2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}}{T}\int_0^T \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]\, dt =$$

$$\langle I\rangle = \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle + 2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}\frac{\sin[(\omega_1 - \omega_2)T]}{(\omega_1 - \omega_2)T}.$$

En un periodo, $(\omega_1 - \omega_2)T = 2\pi$, $\langle I\rangle = I_1 + I_2$, dado $\sin[(\omega_1 - \omega_2)T] = 0$. En el límite $\omega_1 \approx \omega_2$;

$$\frac{\sin[(\omega_1 - \omega_2)T]}{(\omega_1 - \omega_2)T} = 1,$$

y la intensidad promedio toma el valor $\langle I\rangle = \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle + 2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}$.

3.36 Debido a la absorción del aire, el vapor de agua y otras moléculas, la intensidad de la radiación del Sol aumenta con la altitud sobre la superficie terrestre. Asuma que la altura de la atmósfera terrestre es $h = 35$ km y que a esta altitud la intensidad de la radiación es $\langle I_h\rangle = 1.35 \times 10^3$ W/m^2, mientras que en la superficie terrestre la intensidad se reduce a $\langle I_0\rangle = 1.0 \times 10^3$ W/m^2. (a) Suponiendo un incremento lineal de la intensidad con la altitud z, deducir una fórmula $\langle I(z)\rangle$. (b) Utilizar el modelo desarrollado en (a) para calcular la energía contenida en una columna de aire de 1 m^2 de sección transversal y 35 km de altura.

R. (a) La aproximación lineal toma la forma:

$$\langle I(z)\rangle = \langle I_0\rangle + \left(\frac{\langle I_h\rangle - \langle I_0\rangle}{h}\right)z,$$

con $0 < z < h$.

(b) La energía contenida en una columna de aire se obtiene integrando la densidad de energía de la radiación:

$$U = \int u_T dV = \int_0^h \frac{\langle I(z)\rangle}{c} dV = \int_0^h \frac{\langle I(z)\rangle}{c} A dz = \frac{Ah}{2c}(\langle I_0\rangle + \langle I_h\rangle) = 0.137 \text{ J},$$

en donde c es la velocidad de la luz y A es el área transversal de la columna.

3.37* Cuál es el tiempo mínimo necesario que le tomaría a una onda electromagnética al viajar (en recorrido de ida y vuelta) desde la superficie terrestre a un satélite de comunicaciones geosincrónico? (GEO). Un satélite geosincrónico orbita alrededor del Ecuador a una altitud en donde su periodo es de 24 h.

R. Recordamos una de las leyes de Kepler para la frecuencia angular de rotación ω asociada al movimiento de los cuerpos en trayectorias cerradas:

$$\omega^2 = \frac{GM_T}{R^3};$$

en donde R es el radio de la órbita, G la constante gravitacional y M_T la masa terrestre en este caso. En términos del periodo de rotación T:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_T}{R^3};$$

$$R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4.225 \times 10^7 \text{ m},$$

utilizando $G = 6.67428 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_T = 5.9742 \times 10^{24}$ kg. Con el radio terrestre dado por $R_t = 6.378 \times 10^6$ m, la distancia promedio entre la superficie y el satélite es:

$$R - R_t = 3.5867 \times 10^7 \text{ m}.$$

El tiempo mínimo que tarda una onda electromagnética en recorrer dos veces esta distancia es

$$\Delta t = \frac{R - R_t}{c} = 0.24 \text{ s}.$$

3.38 Luz de 500 W incide sobre una pantalla por 10 minutos. Calcular el momentum lineal transferido a la pantalla si (a) ésta absorbe totalmente la radiación, (b) ésta refleja completamente la radiación, (c) absorbe el 30% de la radiación y refleja el resto.

R. (a) La magnitud del momentum transferido Δp se obtiene desde la energía total absorbida por la superficie $\Delta p = U/c$. En 10 minutos (600 segundos), la energía total absorbida por la pantalla es 3×10^5 J. $\Delta p = 10^{-3}$ kg×m/s. (b) En el caso de una superficie completamente reflectora $\Delta p = 2U/c = 2 \times 10^{-3}$ kg×m/s. (c) Al reflejarse el 70% de la radiación, $\Delta p = (1 + 0.7) \times U/c = 1.7 \times 10^{-3}$ kg×m/s.
Nota: El cambio del momentum de la onda electromagnética sobre una superficie puede calcularse como:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i;$$

en donde (r) se establece para la cantidad de movimiento de la onda reflejada e (i) para la cantidad de movimiento de la onda incidente. Nótese que en el caso de incidencia ***normal***, las direcciones de $\vec{p}_r$ y $\vec{p}_i$ son opuestas. Si la cantidad de movimiento de la onda reflejada es un factor σ de aquel asociado a la onda incidente, la magnitud de $|\Delta\vec{p}|$ es:

$$|\Delta\vec{p}| = (1 + \sigma)U/c\ .$$

$\sigma = 0$, para superficies completamente absorbentes, $\sigma = 1$ para superficies completamente reflectoras.

3.39 Una bombilla incandescente irradia 75 W con simetría esférica. Calcular los valores rms del campo eléctrico y del campo magnético a 12.0 m de distancia desde la bombilla.
R. (Ver. Ejemplo ***3.16***) La amplitud del campo eléctrico se obtiene desde:

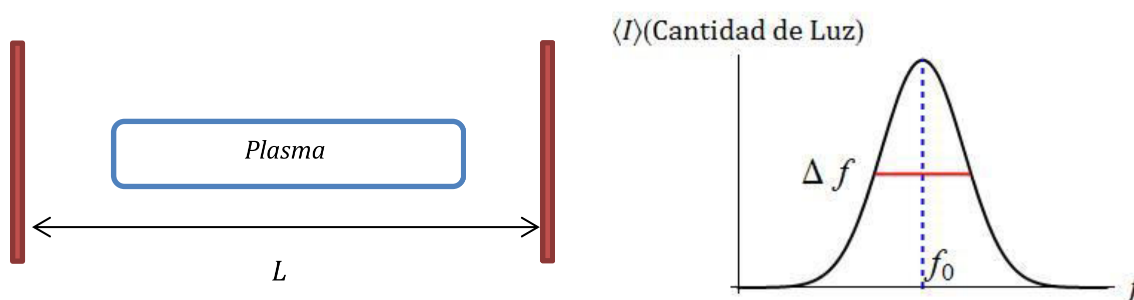
$$E_0 = \sqrt{\frac{2P}{4\pi c r^2 \varepsilon_0}} = 5.59\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

$$E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 3.95\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

El valor rms del campo magnético es:

$$B_{rms} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}c} = 1.32 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}.$$

3.40 Un *láser* puede construirse localizando un tubo con plasma en una cavidad óptica resonante formada por dos espejos planos altamente reflectores, los cuales actúan como paredes rígidas para ondas de luz. El propósito del tubo de plasma es producir luz excitando los modos normales en la cavidad.



(a) Cuáles son las frecuencias de los modos normales de la cavidad resonante? (Expresar su respuesta en términos de la distancia L entre espejos y la velocidad de la luz c.
(b) Suponga que el tubo de plasma emite luz con una frecuencia central $f_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz con un ancho espectral Δf. El valor de Δf es de tal forma que todos los modos normales en la cavidad cuyas frecuencias estén en el rango $\pm 1.0 \times 10^9$ Hz de f_0 serán excitados en el tubo. (1) Cuántos modos excitados existirán en una longitud $L = 1.5$ m?. (2) Cuál es el valor de L más grande posible de tal forma que sólo un modo excitado se forme en la cavidad? (por lo tanto, el láser sólo tendrá una sola frecuencia de salida.)

R. (a) Se presentan modos normales cuando el número de onda satisface la relación:

$$k_n L = n\pi$$

con $k_n = 2\pi f_n / c$, con n entero. Las frecuencias de los modos normales son: $f_n = nc/2L$. (b) (1) Si el ancho de banda es $\Delta f = 2.0 \times 10^9$ Hz, el número de frecuencias resonantes en una cavidad de 1.5 m es $N - 1 = 2L \times \Delta f / c = 20$, en donde el término -1 indica la exclusión de la frecuencia del modo central. (2) En el caso en el que sólo exista un modo resonante, el ancho de banda y la longitud de la cavidad deben satisfacer: $2L' \times \Delta f / c = 1$, $L' = 0.15$ m.

3.41 *Dos ondas polarizadas* en planos perpendiculares viajan en la dirección OX a la misma velocidad. Hallar el movimiento ondulatorio resultante si las amplitudes y las fases correspondientes satisfacen:

(a) $A_1 = 2A_2;\ \varphi_1 = \varphi_2$.
(b) $A_1 = 2A_2;\ \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \pi/2$.
(c) $A_1 = A_2;\ \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \pi/2$.



R. Una onda polarizada en la dirección $\hat{\boldsymbol{u}}$ que se propaga en la dirección *+X* puede representarse en el espacio de los complejos como:

$$\vec{\psi}(x,t) = Ae^{-i(kx-\omega t+\varphi)}\hat{\boldsymbol{u}}.$$

En el caso particular:

$$\vec{\psi}_R(x,t) = A_1e^{-i(kx-\omega t+\varphi_1)}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} + A_2e^{-i(kx-\omega t+\varphi_2)}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2},$$

en donde $\hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{1} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{2} = \mathbf{0}$. Simplificando la expresión anterior, con $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\vec{\psi}_R(x,t) = \left(A_1\hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{1} + A_2e^{i\Delta\varphi}\hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{2}\right)e^{-i(kx-\omega t+\varphi_1)}.$$

(a) $$\vec{\psi}_R(x,t) = A_1\left(\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\right)e^{-i(kx-\omega t+\varphi_1)}.$$

(b) $$\vec{\psi}_R(x,t) = A_1\left(\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} + \frac{i}{2}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\right)e^{-i(kx-\omega t+\varphi_1)}.$$

(c) $$\vec{\psi}_R(x,t) = A_1(\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} + i\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2})e^{-i(kx-\omega t+\varphi_1)}.$$

En el plano de formado por los vectores $\hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{1}$ y $\hat{\boldsymbol{u}}_\mathbf{2}$, la onda resultante exhibe polarización (a) lineal (b) elíptica (c) circular. El signo de $\Delta\varphi$ define el sentido de *rotación* de la onda con respecto al eje de propagación. Las ecuaciones paramétricas asociadas a las componentes de la onda resultante son:

(a) $\psi_1 = \frac{1}{2}\psi_2$ (Polarización lineal).
(b) $\psi_1^2 + 4\psi_2^2 = A_1^2$ (Polarización elíptica, con rotación en sentido anti-horario, según un observador orientado en dirección $-OX$).
(c) $\psi_1^2 + \psi_2^2 = A_1^2$ (Polarización circular, con rotación en sentido anti-horario, según un observador orientado en dirección $-OX$).

PR 3.7. La componente del campo eléctrico de una onda EM plana está dada por la ecuación

$$E_Y(x,t) = 28.5\left(\frac{\mu V}{\mathrm{m}}\right)\sin\left(1.05\times 10^{8}\mathrm{m}^{-1}x + 3.15\times 10^{16}\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}t\right).$$

(a) En qué región del espectro electromagnético está clasificada esta onda?. (b) Calcular la velocidad de propagación de la onda. (c) Escribir una ecuación para el campo magnético asociado $\boldsymbol{B}(x,t)$.
R. (a) $f \approx 0.5 \times 10^{16}$ Hz. Ultravioleta cercano. (b) $v = 3\times 10^{8}$ m/s en dirección negativo de las X. El campo magnético se define por:

$$\boldsymbol{B}(x,t) = 9.5\times 10^{-14}\,(T)\sin\left(1.05\times 10^{8}\mathrm{m}^{-1}x + 3.15\times 10^{16}\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}t\right)(-\hat{\boldsymbol{z}})$$

3.42* Una onda electromagnética plana con $\boldsymbol{E}(x,t) = E_0\hat{\mathbf{y}}\cos(kx-\omega t)$ viaja a lo largo del eje X. Cuánta energía U existe en un instante de tiempo t en un volumen rectangular de dimensiones Δy y Δz entre x y $x+\Delta x$?. Demostrar que $\partial U/\partial t$ es igual a menos la diferencia de energía transportada por el vector de Poynting dentro del volumen entre x y $x+\Delta x$.

R. Integrando directamente la densidad de energía *total*:

$$U = \int u dV = \Delta y \Delta z \int_{x}^{x+\Delta x} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx-\omega t) dx$$

$$U = \Delta y \Delta z \varepsilon_0 E_0^2\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{4k}\left(\sin(2k(x+\Delta x) - 2\omega t) - \sin(2kx - 2\omega t)\right)\right).$$

La razón de cambio de la energía contenida en este volumen es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta y \Delta z \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega}{k}\sin(k\Delta x)\sin(2kx - 2\omega t - k\Delta x).$$

La diferencia en el vector de Poynting evaluado en las posiciones x y $x+\Delta x$, con $\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$:

$$S(x+\Delta x,t) - S(x,t) = \varepsilon_0 c E_0^2\left[\cos^2(k(x+\Delta x)-\omega t) - \cos^2(kx-\omega t)\right].$$

$$S(x+\Delta x,t) - S(x,t) = -\varepsilon_0 c E_0^2 \sin(k\Delta x)\sin(2kx - 2\omega t - k\Delta x).$$

De estas relaciones se deduce:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta y \Delta z\left[S(x+\Delta x,t) - S(x,t)\right].$$

Multiplicando por Δx, y efectuando el límite $\Delta x \to 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\left[S(x+\Delta x,t) - S(x,t)\right]}{\Delta x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}=0,$$

con $u=U/V$. Esta expresión corresponde a la forma diferencial de la ley de conservación de la energía para los campos electromagnéticos. Cfr. Ej. **2.123**.

3.43* *Rotación de Faraday.* Una onda electromagnética polarizada linealmente con su vector campo eléctrico a lo largo del eje Z se propaga en un medio ionizado. En este medio, las ondas polarizadas circularmente hacia la derecha se propagan más rápido que las ondas polarizadas circularmente hacia la izquierda. La diferencia en la velocidad es $\Delta v=7\times10^{-5}c$ a 15 GHz. Describa la polarización de la onda después de 25 m.

R. Tomamos el resultado del Ej. ***3.41* (c)**. Antes de propagarse en el medio ionizado, el campo eléctrico tiene polarización lineal definida por $\boldsymbol{E}(x,t)=E_0\hat{\boldsymbol{z}}e^{-i(kx-\omega t)}$, con $kc=\omega$. La polarización circular hacia la derecha puede escribirse como:

$$\boldsymbol{E}_R(x,t)=E_0(\hat{\boldsymbol{z}}+i\hat{\boldsymbol{y}})e^{-i(k_Rx-\omega t)},$$

mientras que la polarización circular hacia la izquierda es:

$$\boldsymbol{E}_L(x,t)=E_0(\hat{\boldsymbol{z}}-i\hat{\boldsymbol{y}})e^{-i(k_Lx-\omega t)}.$$

El campo resultante es el resultado de la superposición de estos vectores:

$$\boldsymbol{E}_T(x,t)=E_0\left[\left(e^{-ik_Rx}+e^{-ik_Lx}\right)\hat{\boldsymbol{z}}+i\left(e^{-ik_Rx}-e^{-ik_Lx}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]e^{i\omega t}.$$

Introducimos la diferencia en los vectores de onda $k_L=k_R+\Delta k$ dado $v_L<v_R$:

$$\boldsymbol{E}_T(x,t)=E_0\left[\left(1+e^{-i\Delta kx}\right)\hat{\boldsymbol{z}}+i\left(1-e^{-i\Delta kx}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right]e^{-i(k_Rx-\omega t)}.$$

Cuando la onda viaja una distancia l, el ángulo de polarización θ con respecto al eje Z se define a través de la función tangente:

$$\tan\theta=\frac{E_{TY}}{E_{TZ}}=\frac{\left(1-e^{-i\Delta kl}\right)}{\left(1+e^{-i\Delta kl}\right)}=\tan\left(\frac{\Delta kl}{2}\right).$$

Desde la relación $kv=\omega$, válida para el medio ionizado,

$$\Delta kv+k\Delta v=0,\quad \Delta k=-\frac{k^2}{\omega}\Delta v\approx-\frac{\omega}{c^2}\Delta v.$$

en la aproximación $kc\approx\omega$ se ha utilizado en la última línea. La magnitud del ángulo puede estimarse como:

$$\theta\approx\frac{\Delta kl}{2}=\frac{\pi f}{c}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)=16.87°.$$

3.44 Una onda electromagnética con amplitud $\boldsymbol{E_0} = 340\ (\mathrm{V/m})(2\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$ pasa a través de un filtro polarizador con su eje paralelo al vector $\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}}$. Cuál es la intensidad de la luz transmitida?.
R. La componente del campo eléctrico paralela al eje polarizador es:

$$E_\parallel = \boldsymbol{E_0} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 340\sqrt{5}\ \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)\frac{(2\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}})}{\sqrt{10}} = -\frac{340}{\sqrt{10}}\ \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right).$$

La intensidad de la luz transmitida puede calcularse como: $\langle I \rangle = c\varepsilon_0 E_\parallel^2 = 30.72\ \mathrm{W/m^2}$. El porcentaje de la intensidad de la luz transmitida puede calcularse desde:

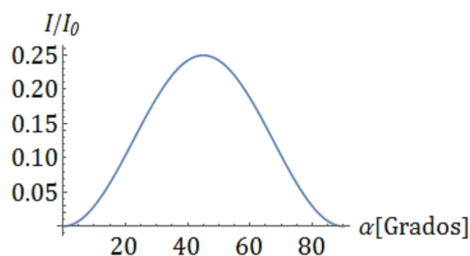
$$\frac{\langle I_t \rangle}{\langle I_0 \rangle} = \left(\frac{E_\parallel}{E_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (50\%).$$

3.45 Los ejes de transmisión de dos filtros polarizadores forman un ángulo θ_0. Un tercer filtro puede ser rotado entre los otros dos. Probar que este sistema produce un máximo de intensidad transmitida cuando el filtro de la mitad forma un ángulo $\theta_0/2$ con los otros dos.
R. Si consideramos que la intensidad de la onda transmitida al superar el primer filtro es I_0, la intensidad de la onda al pasar el segundo filtro, que forma un ángulo α con respecto al primero es $I_0 \cos^2(\alpha)$. Finalmente, cuando la onda supera el tercer filtro: $I(\alpha) = I_0 \cos^2(\alpha) \cos^2(\theta_0 - \alpha)$. El máximo de esta función es:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}[\sin(2\alpha) + \sin(2\alpha - 2\theta_0) + \sin(4\alpha - 2\theta_0)],$$

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = -\cos(\alpha)\,(\sin(\alpha) + \sin(3\alpha - 2\theta_0)).$$

El máximo de la función de intensidad aparece cuando $\partial I(\alpha)/\partial \alpha = 0$, ó $\sin(\alpha) = -\sin(3\alpha - 2\theta_0)$ cuya solución es $\alpha = \theta_0/2$, $I(\theta_0/2) = I_0 \cos^4(\theta_0/2)$.



Gráfica de la distribución de la intensidad relativa resultante en función del ángulo relativo del segundo filtro, cuando el primero y el tercero forman 90 grados.

4. ÓPTICA GEOMÉTRICA Y ONDULATORIA

En el capítulo anterior estudiamos en forma breve los aspectos generales de la teoría de propagación de una Onda Electromagnética plana. La óptica puede considerarse como la rama de la ciencia que estudia las respuestas de la interacción entre la radiación y la materia. Las imágenes radiológicas obtenidas en un aparato de rayos X, los sofisticados sensores optoelectrónicos, los filtros polarizadores de luz, los lentes fotosensibles, sólo por mencionar algunos casos, involucran los conceptos fundamentales de difracción, interferencia, absorción y transmisión de los campos electromagnéticos a través de los materiales, tejidos biológicos o arreglos periódicos de cristales en fase de estado sólido. La información resultante de esta interacción (respuesta espectral) proporciona datos sobre importantes características físicas del sistema, como el parámetro de red de un arreglo cristalino en el caso de los rayos X o las diferentes simetrías y energías propias de los modos colectivos de vibración de las moléculas o electrones que componen una muestra de interés. En este capítulo nos centraremos en el estudio de las leyes elementales de la *óptica geométrica* y la *óptica ondulatoria*. En el primer caso, exploraremos la teoría de propagación de los rayos en diferentes medios como espejos y lentes. En el segundo caso, el enfoque es orientado a discutir los fenómenos de interferencia y difracción. Algunas definiciones necesarias se presentan a continuación.

Frente de Onda: Lugar geométrico formado por el producto vectorial entre el campo eléctrico **E** y campo magnético **B** en una onda electromagnética.

Rayo: Línea imaginaria en dirección paralela a la dirección de propagación de la onda electromagnética, representada usualmente por el vector de onda **k**.

Índice de Refracción: Relación entre las velocidad de propagación de la onda electromagnética en el vacío y en el medio:

$$n = \frac{c}{v}.$$

n es una cantidad adimensional mayor o igual a 1, depende de las propiedades intrínsecas del medio y responde a la frecuencia de la radiación incidente. Los valores del índice de refracción de algunas sustancias comunes son tabulados.

Tabla 4.1.

Índice de refracción aproximado para varios compuestos	n **(Valores a Temperatura ambiente y presión atmosférica para longitudes de onda de 589 nm)**
Aire (0 °C)	1.000293
Amoniaco (0 °C)	1.000376
CO_2 (0 °C)	1.000451
Cloro (0 °C)	1.000773
Hidrógeno (0°C)	1.000132
Metano (0°C)	1.000444
Benceno	1.501
Etanol	1.329
Agua	1.333
Ioduro de Metileno	1.726
Diamante	2.417
Zafiro	1.767
Cuarzo Fundido	1.458
Pirex	1.474
Flint Denso	1.655
Hielo (0°C)	1.310
Sal (NaCl)	1.544

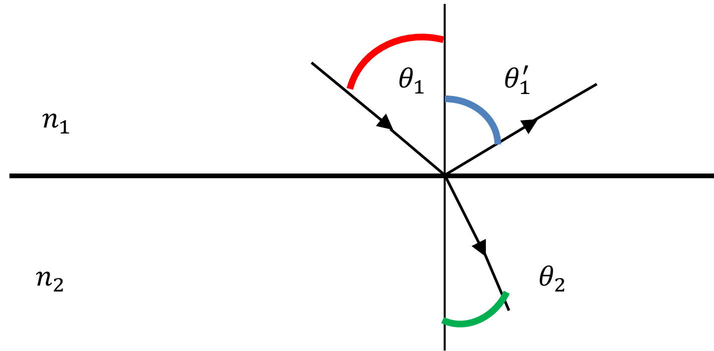
4.1 Leyes de Snell. La relación entre los índices de refracción en una frontera de separación entre dos medios y los ángulos de los rayos incidentes y refractados con respecto a la normal de la frontera, puede escribirse como:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

mientras que la relación entre los ángulos de incidencia y reflejado es de igualdad:

$$\theta_1' = \theta_1.$$

El esquema geométrico para la ley de Snell se muestra en la siguiente figura.



4.2 Reflexión Total Interna. Si el rayo incidente no se refracta hacia el segundo medio, toda la luz incidente se reflejará en el primer medio. Este fenómeno sucede para ángulos mayores e iguales a cierto ángulo crítico que puede calcularse desde la ley de Snell como:

$$n_1 \sin\theta_{crítico} = n_2 \sin 90°,$$

4.3 Angulo Crítico. El ángulo crítico aparece cuando el índice de refracción del segundo medio es menor que el índice de refracción del primer medio.

$$\sin\theta_{crítico} = n_2/n_1.$$

4.4 Principio de Fermat.

La ley de Snell puede estudiarse desde el principio de tiempo mínimo de Fermat. Considere dos medios con diferentes coeficientes de refracción y separados por una frontera plana en el plano $Y = 0$. Si un haz de luz es emitido en el punto (1) con coordenadas $(-x, y_1)$, atraviesa la frontera y alcanzará el punto (2) con coordenadas $(x, -y_2)$, como se indica en la figura. La distancia horizontal entre los puntos es L. El tiempo total que toma el haz de luz desde el punto (1) al punto (2) es:

$$t_{12} = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}}{v_2},$$

con $v_{1,2} = c/n_{1,2}$ como las velocidades de la luz en los medios (1) y (2) respectivamente. Minimizando la funcional tiempo t_{12}:

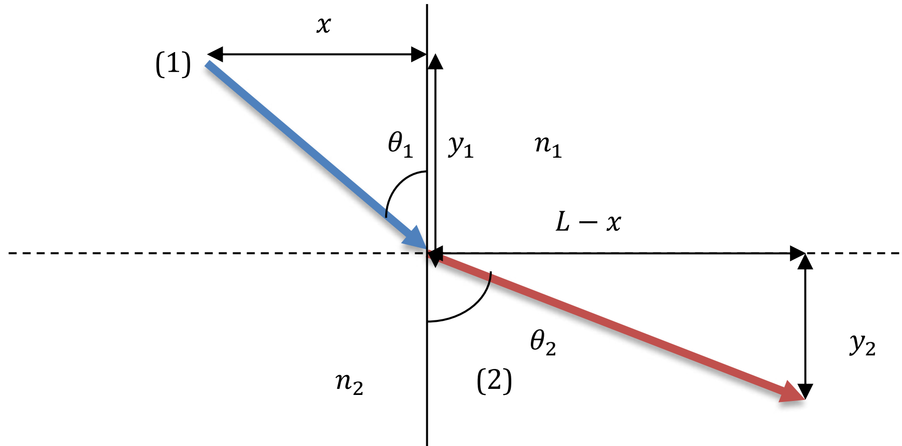
$$\frac{\delta t_{12}}{\delta x} = 0 = \frac{1}{c}\left(\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{n_2 (L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}}\right).$$

Simple geometría conduce a la relación:

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+y_1^2}} = \frac{n_2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+y_2^2}},$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Este cálculo demuestra que la ley de Snell es consecuencia del principio de tiempo mínimo de Fermat: *La luz recorrerá el camino que le tome el menor tiempo posible*.

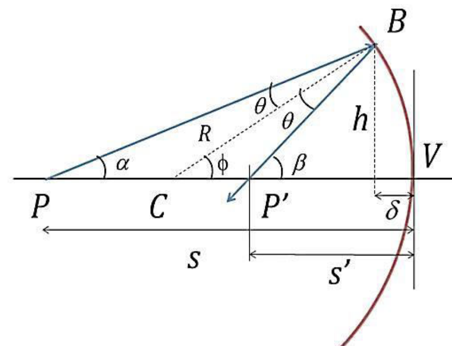


4.5 Reflexión en una Superficie Esférica.

En esta sección se deduce la fórmula que relaciona la distancia posición, distancia imagen y el foco de un espejo esférico cóncavo hacia la luz incidente. La nomenclatura a utilizar puede resumirse en la siguiente lista:

C - Centro de curvatura
V- Vértice del espejo
$\overline{CV}$ – Eje óptico
P- Punto Objeto
P'-Imagen del punto P
s- Distancia del punto Objeto al vértice V
s'-Distancia de la Imagen al vértice V
R-Radio de Curvatura del espejo

Un haz de luz parte del punto objeto P, se refleja con un ángulo θ con respecto a la normal, en el punto B y finalmente llega al punto P' sobre el eje óptico $\overline{CV}$. En el triángulo ΔPBC se cumple $\phi = \alpha + \theta$, mientras que en el triángulo $\Delta P'BC$ se cumple la relación $\beta = \phi + \theta$. Combinando estas dos expresiones, tendremos $\alpha + \beta = 2\phi$. Las distancias correspondientes se obtienen con las fórmulas de tangente:



$$\tan\alpha = \frac{h}{s-\delta}\ ;\ \tan\beta = \frac{h}{s'-\delta};\ \ \tan\phi = \frac{h}{s-\delta};$$

En la aproximación de ángulos pequeños, y para el caso en el que la distancia horizontal entre el vértice V y la proyección del punto B sobre el eje óptico es muy pequeña comparada con las distancias s y s', tendremos la relación conocida entre el radio del espejo y las distancias:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}.$$

Convención de signos para superficies esféricas

s_O, f_O	+ *IZQUIERDA DE V*
s_I, f_I	+ *Derecha de V*
R	+ *C a la derecha de V*
[Tamaño objeto, imagen] y_O, y_I	+ *Por encima del eje óptico*
x_O	+ *Izquierda de* F_O
x_I	+ *Derecha de* F_I

Convención de signos para superficies esféricas reflectoras

s_O, f_O	+ *IZQUIERDA DE V*
s_I, f_I	+ *Derecha de V*
R	+ *C a la derecha de V*
[Tamaño objeto, imagen] y_O, y_I	+ *Por encima del eje óptico*

Signos de los parámetros para espejos esféricos

CANTIDAD	+	-
s_O	Objeto Real	Objeto Virtual
s_I	Imagen Real	Imagen Virtual
f	Espejo Cóncavo	Espejo Convexo
y_O	Orientación Derecha	Orientación Invertida
y_I	Orientación Derecha	Orientación Invertida
(Aum.Transversal) M_T	Derecha	Invertida
R	Espejo Convexo	Espejo Cóncavo

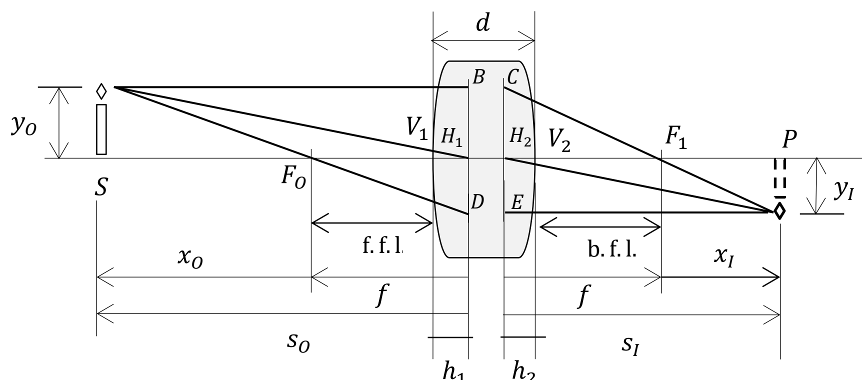
Signos de los parámetros para lentes delgadas

CANTIDAD	+	-
s_O	Objeto Real	Objeto Virtual
s_I	Imagen Real	Imagen Virtual
f	Lente convergente	Lente divergente
y_O	Orientación Derecha	Orientación Invertida
y_I	Orientación Derecha	Orientación Invertida
(Aum.Transversal) M_T	Derecha	Invertida

Características de las lentes delgadas para objetos reales

CONVEXA				
OBJETO	**IMAGEN**			
Localización	**Tipo**	**Localización**	**Orientación**	**Tamaño**
$\infty > s_O > 2f$	Real	$f > s_I > 2f$	Invertida	Reducida
$s_O = 2f$	Real	$s_I = 2f$	Invertida	Igual
$f < s_O < 2f$	Real	$\infty > s_I > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_O = f$		$\pm\infty$		
$s_O < f$	Virtual	$\|s_I\| > s_O$	Derecha	Aumentada
Cóncava				
OBJETO	**IMAGEN**			
Localización	**Tipo**	**Localización**	**Orientación**	**Tamaño**
Cualquiera	Virtual	$\|s_I\| < \|f\|$	Derecha	Reducida

Lentes Gruesas. Plantearemos las ecuaciones para la distancia focal asociada f a una lente de espesor d y con índice de refracción n, inmersa en el aire $n_a \approx 1$.



Un objeto puntual en S sobre el eje de una lente gruesa, se ubicaría a una *distancia focal frontal* (f.f.l.) delante del vértice V_1 [segmento $\overline{V_1F_O}$] si los rayos que emergen desde ese punto se desvían paralelamente al eje $\overline{V_2P}$. De forma similar, los rayos incidentes sobre el eje $\overline{SV_1}$ convergen a una *distancia focal posterior* b.f.l. detrás del vértice V_2. La fórmula $1/s_O + 1/s_I = 1/f$ sigue siendo válida y las distancias focales son medidas desde H_1 y H_2. Los puntos BH_1D y CH_2E pertenecen al primer y segundo plano principal respectivamente. Estos planos se construyen desde la intersección de todos los pares de rayos desviados con los puntos principales de intersección con los ejes principales H_1 y H_2. Estos planos no necesariamente están localizados en el interior de la lente. Explícitamente:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right].$$

Los planos principales pueden ser localizados con respecto a los vértices utilizando las ecuaciones:

$$\overline{V_1H_1} = h_1 = -f\,\frac{(n-1)d}{nR_2}, \quad \overline{V_2H_2} = h_2 = -f\,\frac{(n-1)d}{nR_1}.$$

Los parámetros h_1 y h_2 serán ambos positivos cuando los planos principales están a la *derecha* de sus respectivos vértices V_1 y V_2. Nótese que emerge desde cualquier punto en el primer plano principal abandonará el lente como si éste fuese generado en un punto a la misma altura con respecto al eje en el segundo plano principal.

4.6 Interferencia

El fenómeno de *interferencia* ocurre en general cuando dos o más ondas coinciden simultáneamente en un punto. En óptica, este fenómeno explicaría la naturaleza ondulatoria de la Luz cuando ésta atraviesa por un obstáculo cuya dimensión es similar a la longitud de onda asociada (difracción de Fraunhofer), o por un sistema de doble rendija de Young. En ambos casos, no es posible explicar los efectos subsecuentes de estos experimentos utilizando el modelo corpuscular de la Luz y por consiguiente se hace necesario replantear la aproximación. Consideremos dos ondas coherentes con la misma amplitud que se propagan en un medio

homogéneo y con una diferencia de fase relativa δ. Matemáticamente, la onda resultante en un punto puede escribirse como:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \delta).$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left[\frac{a+b}{2}\right]\cos\left[\frac{a-b}{2}\right],$$

tendremos

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right).$$

La amplitud de la onda resultante depende de la diferencia de fase relativa de las ondas que la conforman: $A(\delta) = 2A\cos(\delta/2)$. Existen entonces valores para δ en los cuales la amplitud resultante es máxima, o cero. En el primer caso, existe interferencia constructiva para:

$$\delta = 2n\pi, \quad n = 0,1,2 \ldots.$$

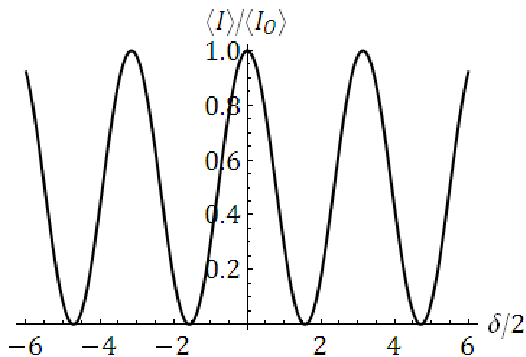
De forma análoga, interferencia destructiva se presenta con valores de la fase dados por:

$$\delta = (2n+1)\pi, \quad n = 0,1,2 \ldots.$$

La intensidad de la onda resultante es proporcional al cuadrado de la amplitud:

$$I(\delta) = I_0\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

cuyos valores claramente fluctúan en el rango entre 0 e I_0.



Patrón de intensidad producido por dos ondas coherentes con diferencia de fase relativa δ. Se observan máximos y mínimos alternados para $\delta = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$

Si la diferencia de fase se produce por una diferencia de recorrido entre las ondas $\Delta r = r_2 - r_1$, el cambio de fase asociado se calcula como:

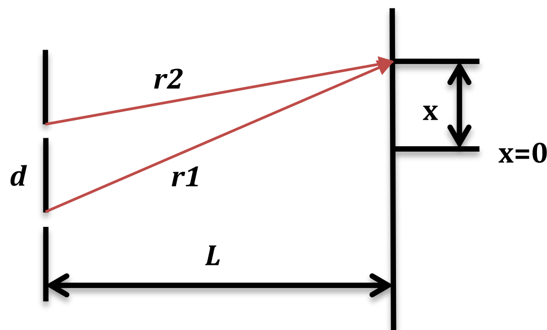
$$\Delta\phi = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r.$$

Desde la discusión anterior se puede por deducir que si la diferencia de camino es un múltiplo entero de la longitud de onda λ, se presentará interferencia constructiva. De forma análoga, si la diferencia de camino es un múltiplo semi-entero impar de λ, la amplitud de la onda resultante es cero y existe el fenómeno de interferencia destructiva.

$$\Delta r = m\lambda, \quad m = 0,1,2 \ldots \text{ Interferencia Constructiva}$$

$$\Delta r = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0,1,2 \ldots \text{ Interferencia Destructiva}$$

***Interferencia de luz de dos fuentes I**: Experimento de Young.* Dos ranuras separadas entre sí 0.3 mm están ubicadas a 85 cm de una pantalla. Cuál es la distancia entre la segunda y tercera líneas oscuras de la configuración de interferencia en la pantalla cuando las ranuras están iluminadas con luz coherente de 600 nm?



R. En un sistema de doble rendija, las posiciones de los mínimos de orden m están dadas por la expresión:

$$\Delta r = d\sin\theta = \left(m \pm \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.,$$

en donde d es la distancia entre las rendijas, θ el ángulo de refracción, λ la longitud de onda y m el orden de los mínimos. Para $m = 2, \sin\theta = 0.005$, mientras que para $m = 3, \sin\theta = 0.007$. La distancia entre franjas oscuras es aproximadamente $\Delta y \approx 85 \times \Delta\theta = 0.17$ cm.

***Patrón de Fraunhofer**.* Es posible calcular la intensidad de la configuración del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura (sin utilizar el método de los fasores). Considere la figura adjunta. Sea y' la posición de un punto dentro de la ranura con ancho a, con $y' = 0$ en el centro de la ranura. Dividimos la ranura en tiras infinitesimales de ancho dy', cada una de las cuales actúa como fuente de ondas secundarias. La amplitud de la onda total en el punto $\boldsymbol{O}$ en la pantalla lejana a una distancia D es E_0. La amplitud de la onda secundaria proveniente de cada tira infinitesimal dentro de la ranura es $E_0(dy'/a)$, de modo que el campo eléctrico de la onda secundaria a una distancia X de la ranura es:

$$dE = E_0\left(\frac{dy'}{a}\right)\sin(\omega t - kX).$$

En términos de la distancia a la pantalla, la distancia X puede aproximarse a: ($a \ll D$)

$$X \sim D - y'\sin\theta,$$

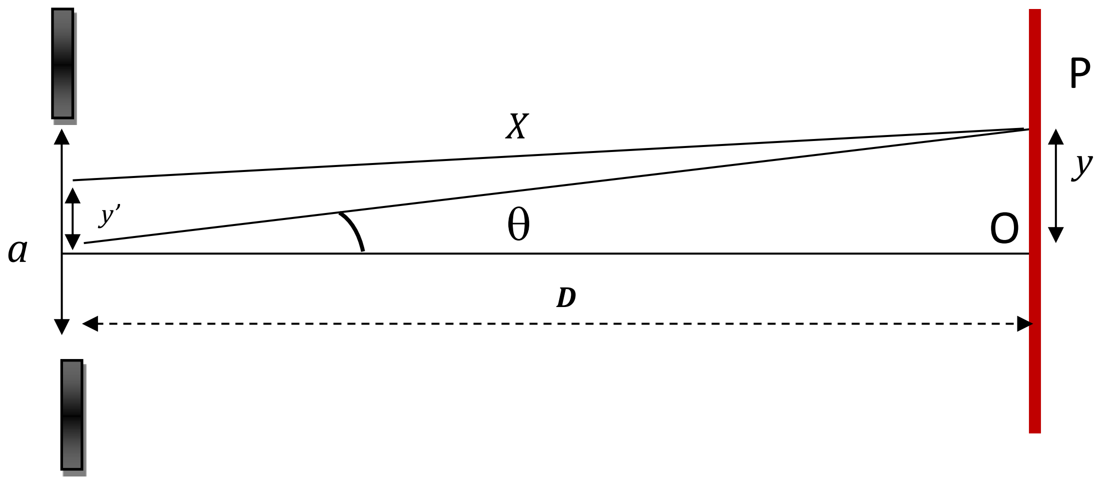
y la contribución debido a una tira infinitesimal es:

$$dE = E_0 \left(\frac{dy'}{a}\right) \sin(\omega t - k(D - y' \sin\theta)).$$

Integrando sobre todas las contribuciones dE de todas las partes de la ranura, obtenemos:

$$E(P) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dE = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0 \left(\frac{dy'}{a}\right) \sin\big(\omega t - k(D - y' \sin\theta)\big) =$$

$$\frac{E_0}{ka \sin\theta} \left\{\cos\left(\omega t - kD - \frac{ka}{2}\sin\theta\right) - \cos\left(\omega t - kD + \frac{ka}{2}\sin\theta\right)\right\}.$$



Utilizando propiedades de la trigonometría, esta última relación puede simplificarse a:

$$E(P) = E_0 \sin(\omega t - kD) \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right), \quad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}.$$

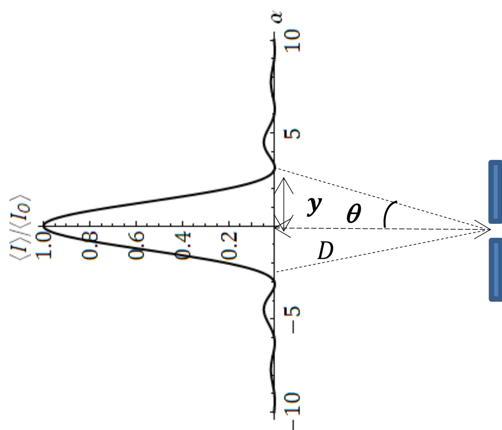
Aplicando el límite $\theta \to 0$, correspondiente al punto O de la figura, es posible demostrar que la onda está descrita por:

$$E(P) = E_0 \sin(\omega t - kD).$$

Si la intensidad promedio en el punto O es I_0, entonces la intensidad en el punto P está dada por:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

que corresponde al patrón de intensidad asociado a la difracción por una rendija.



Ejemplo. Difracción de Fraunhofer. La distancia angular entre el centro y el primer mínimo de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija se denomina semi-ancho angular (Ver figura). Obtener el semi-ancho angular (factor $\boldsymbol{y}$ en la figura) para un láser que emite en el rojo ($\lambda = 632.8\,\text{nm}$), e incide en una rejilla con una abertura de 0.1 mm ubicada a una distancia de 2 m de una pantalla.

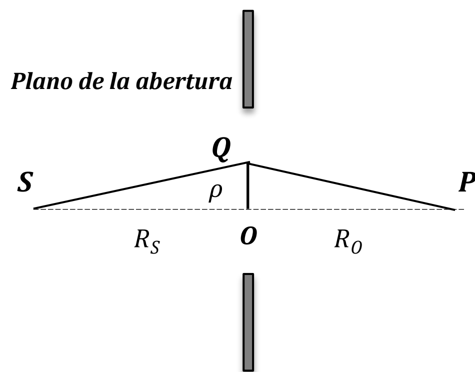
R. El primer mínimo de difracción está definido según $a\sin\theta = \lambda$. El valor de la función $\sin\theta$ puede aproximarse al valor de la función $\tan\theta$, en la aproximación de pantalla lejana. De esta forma:

$$\sin\theta \sim \tan\theta = \frac{y}{D} = \frac{\lambda}{a}.$$

La distancia $\boldsymbol{y}$ es por lo tanto: $y = D\lambda/a$. Numéricamente: ***y = 1.27 cm.***

4.7 Difracción de Fresnel. El término *difracción de Fresnel* se refiere a la aplicación de la teoría de Kirchhoff en donde una fuente y un observador están cerca de una abertura, en contraste con la aproximación de una fuente localizada a una *distancia infinita*. En este documento trataremos el problema en forma cualitativa, introduciendo el concepto de *zonas de Fresnel.*

Abertura Circular



La diferencia de fase debido a la diferencia de recorrido puede expresarse convenientemente en términos del número n de semi longitudes de onda en las cuales el recorrido desde la fuente (***S***) al observador (***P***) ***SQP*** es mayor ***SOP***:

$$n\frac{\lambda}{2} = (R_S^2 + \rho^2)^{1/2} + (R_O^2 + \rho^2)^{1/2} - (R_S + R_O).$$

En la aproximación en donde se considera que la abertura es pequeña en comparación con las distancias R_S Y R_O:

$$n\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\rho^2.$$

Un elemento de área dS sobre la abertura puede escribirse en términos del parámetro n:

$$dS = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho\frac{d\rho}{dn}dn = \pi\lambda\left(\frac{R_S R_O}{R_S + R_O}\right)dn.$$

En una abertura circular de radio a, $\Delta S = \pi a^2$. El número de zonas de Fresnel descubiertas por la abertura puede aproximarse a:

$$n = \left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\frac{a^2}{\lambda}.$$

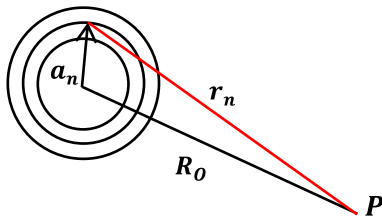
El factor de fase que introduce este número puede cuantificarse desde el término $\exp(ikn\lambda/2) = \exp(in\pi)$. En una abertura de radio a que descubra un total de n zonas se introduce un factor adicional sobra la función de onda ψ:

$$\psi \sim \int_0^n e^{in\pi}\, dn \sim \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

La intensidad resultante en $\boldsymbol{P}$ se obtiene desde $|\psi|^2$:

$$\langle I_R \rangle = 2\langle I_0 \rangle (1 - \cos(\pi n)),$$

en donde $\langle I_0 \rangle$ es la intensidad que se observaría en $\boldsymbol{P}$ en ausencia de cualquier obstáculo. La intensidad tiene un valor máximo igual a $4\langle I_0 \rangle$ (o en forma equivalente, la amplitud del campo de radiación toma el valor máximo $2\psi_0$) cuando n es un entero impar y cero cuando n es un entero par. El factor n representa el número de zonas *descubiertas* por la abertura, el cual puede cambiar variando su tamaño o las distancias axiales.



Una expresión para el radio más externo de la n ésima zona de Fresnel en un frente de onda plano ubicado a una distancia R_O desde un punto de observación $\boldsymbol{P}$ es, en la aproximación de fuente lejana ($R_S \to \infty$), $\rho \to a_n$:

$$a_n = \sqrt{n\lambda R_O}.$$

El primer máximo de intensidad en $\boldsymbol{P}$ en una abertura de radio a estará localizado a una distancia a^2/λ. El primer mínimo de intensidad para la misma abertura estará en localizado en $a^2/2\lambda$, el segundo máximo de intensidad en $a^2/3\lambda$...etc.

El cálculo de la amplitud del campo resultante en $\boldsymbol{P}$ exige un tratamiento matemático especial en el marco de la teoría de difracción de Kirchhoff, el cual está fuera del alcance de estas notas. Intentaremos una aproximación heurística. Consideremos que las amplitudes asociadas a las m zonas de Fresnel consecutivas son $E_{01}, E_{02}, \ldots E_{0m}$. Sumando las amplitudes de los m campos:

$$E_0 = E_{01} - E_{02} + E_{03} - \cdots + E_{0m},$$

con m impar. Esta expresión puede también escribirse como:

$$E_0 = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{01} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \cdots \left(\frac{E_{0j-1}}{2} - E_{0j} + \frac{E_{0j+1}}{2}\right) + \cdots + \frac{E_{0m}}{2}.$$

Si los términos en los paréntesis son positivos (i.e., la amplitud del campo de cualquier zona es menor que el promedio del producido por las zonas adyacentes)

$$\frac{E_{0j-1}}{2} - E_{0j} + \frac{E_{0j+1}}{2} > 0,$$

y $E_0 > (E_{01} + E_{0m})/2$. Al construir la suma de la forma:

$$E_0 = E_{01} - \frac{E_{02}}{2} - \left(\frac{E_{02}}{2} - E_{03} + \frac{E_{04}}{2}\right) - \left(\frac{E_{0m-3}}{2} - E_{0m-2} + \frac{E_{0m-1}}{2}\right) - \frac{E_{0m-1}}{2} + E_{0m}.$$

En este caso, con la aproximación de amplitud entre zonas *cuasi* constante $E_{01} \approx E_{02}$ y $E_{0m-1} \approx E_{0m}$. En consecuencia $E_0 < (E_{01} + E_{0m})/2$, cuya única solución sólo puede satisfacer la igualdad $E_0 = (E_{01} + E_{0m})/2$. Para m par, un argumento idéntico conduce a $E_0 = (E_{01} - E_{0m})/2$. Cuando se suma un gran número de zonas como si no existiese abertura, la amplitud de la m-ésima zona es despreciablemente pequeña debido la curvatura del frente de onda definido por el factor de oblicuidad, de tal forma que $E_{0m} \to 0$ y

$$E_{01} = 2E_0,$$

lo cual significa que, independientemente del número de zonas descubiertas por la abertura, la amplitud del campo asociado a la primera zona de Fresnel es el doble de la amplitud incidente sin obstáculo, y a su vez, dentro de la aproximación de un número limitado de zonas, a las amplitudes generadas por las zonas consecutivas.

Abertura Rectangular

En la aproximación paraxial, la diferencia de recorrido para un elemento de área localizado en el punto (ξ, η) en la abertura rectangular, con dimensiones $dS = d\xi d\eta$ se calcula como:

$$\delta(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)(\xi^2 + \eta^2),$$

en analogía con el caso de abertura circular. Integrando el factor de fase $\exp\big(ik\delta(\xi, \eta)\big)$ sobre el obstáculo de dimensiones ξ_1, ξ_2 y η_1, η_2:

$$F(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\big(ik\delta(\xi, \eta)\big)\, d\xi d\eta,$$

Con un cambio de variable:

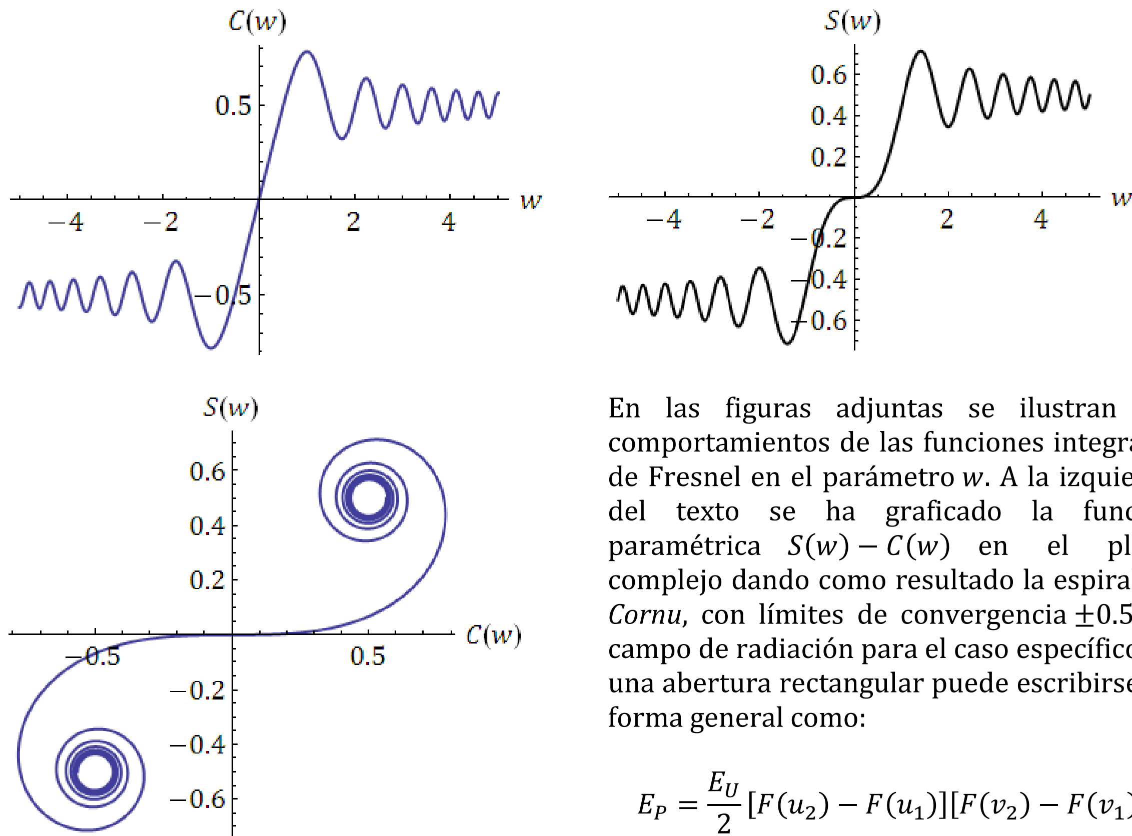
$$u = \left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \xi, \qquad v = \left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \eta,$$

Las integrales independientes de difracción se modifican como:

$$F(u_1, u_2, v_1, v_2) = \int_{u_1}^{u_2} \exp\left(\frac{i\pi u^2}{2}\right) du \int_{v_1}^{v_2} \exp\left(\frac{i\pi v^2}{2}\right) dv,$$

reconocidas como las *integrales de Fresnel.* En el caso de una abertura simple muy larga, es suficiente integrar una de las coordenadas ya que el resultado de la segunda integral converge a un valor constante conforme el límite tiende a infinito. Tomando el valor real e imaginario:

$$\int_0^w \exp\left(\frac{i\pi u^2}{2}\right) du = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du + i\int_0^w \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du = C(w) + iS(w).$$



En las figuras adjuntas se ilustran los comportamientos de las funciones integrales de Fresnel en el parámetro w. A la izquierda del texto se ha graficado la función paramétrica $S(w) - C(w)$ en el plano complejo dando como resultado la espiral de *Cornu*, con límites de convergencia ± 0.5. El campo de radiación para el caso específico de una abertura rectangular puede escribirse en forma general como:

$$E_P = \frac{E_U}{2}[F(u_2) - F(u_1)][F(v_2) - F(v_1)]$$

en donde E_U es el campo en ***P*** asociado a la radiación sin obstrucción, y el factor 1/2 es un factor de normalización. La fórmula general para la intensidad en ***P***

$$\langle I_P \rangle \propto \frac{E_P E_P^*}{2} = \frac{\langle I_0 \rangle}{4}\{[C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2\}$$
$$\times \{[C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2\}.$$

Estos valores deben obtenerse por tablas o en un programa de computador para los casos específicos de los parámetros u, v. En la última expresión, en el caso de una abertura *infinitamente* extendida, el campo no experimenta obstrucción, y la intensidad de la radiación en ***P*** es $\langle I_0 \rangle$, tomando en consideración $C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm 1/2$.

Se anexan algunos valores numéricos de las integrales de Fresnel, los cuales serán de utilidad en la resolución de ejercicios prácticos.

Valores Numéricos Integrales de Fresnel.

w	$C(w)$	$S(w)$	w	$C(w)$	$S(w)$
0.	0.	0.	1.1	0.76	0.54
0.1	0.1	0.00052	1.2	0.72	0.62
0.2	0.2	0.0042	1.3	0.64	0.69
0.3	0.3	0.014	1.4	0.54	0.71
0.4	0.4	0.033	1.5	0.45	0.7
0.5	0.49	0.065	1.6	0.37	0.64
0.6	0.58	0.11	1.7	0.32	0.55
0.7	0.66	0.17	1.8	0.33	0.45
0.8	0.72	0.25	1.9	0.39	0.37
0.9	0.76	0.34	2.	0.49	0.34
1.	0.78	0.44	2.1	0.58	0.37
w	$C(w)$	$S(w)$	w	$C(w)$	$S(w)$
2.2	0.64	0.46	3.3	0.41	0.52
2.3	0.63	0.55	3.4	0.44	0.43
2.4	0.55	0.62	3.5	0.53	0.42
2.5	0.46	0.62	3.6	0.59	0.49
2.6	0.39	0.55	3.7	0.54	0.57
2.7	0.39	0.45	3.8	0.45	0.57
2.8	0.47	0.39	3.9	0.42	0.48
2.9	0.56	0.41	4.	0.5	0.42
3.	0.61	0.5	4.1	0.57	0.48
3.1	0.56	0.58	4.2	0.54	0.56
3.2	0.47	0.59	4.3	0.45	0.55
w	$C(w)$	$S(w)$	w	$C(w)$	$S(w)$
4.4	0.44	0.46	5.5	0.48	0.55
4.5	0.53	0.43	5.6	0.45	0.47
4.6	0.57	0.52	5.7	0.54	0.46
4.7	0.49	0.57	5.8	0.53	0.55
4.8	0.43	0.5	5.9	0.45	0.52
4.9	0.5	0.44	6.	0.5	0.45
5.	0.56	0.5	6.1	0.55	0.52
5.1	0.5	0.56	6.2	0.47	0.54
5.2	0.44	0.5	6.3	0.48	0.46
5.3	0.51	0.44	6.4	0.55	0.5
5.4	0.56	0.51	6.5	0.48	0.55

La variable w aparece como un parámetro, cada punto sobre la espiral identificado con un valor específico de w. La curva pasa a través del origen cuando $w = 0$. En efecto, dado un elemento de longitud de arco a lo largo de la espiral $dl = \sqrt{[dC(w)]^2 + [dS(w)]^2} = dw$. La variable w puede pensarse simplemente como la coordenada que cuantifica la longitud de arco a lo largo de la espiral. Cuando $w \to \pm\infty$,

la espiral converge a los dos puntos límites $\pm(1/2 + i1/2)$. La pendiente de la curva en cualquier punto es:

$$\frac{\partial S}{\partial C} = \tan\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) = \tan(\phi);$$

es decir, en cada punto la tangente de la curva forma un ángulo $\pi w^2/2$ con el eje real C. El radio de la curvatura de la espiral está dado por:

$$\left[\frac{d\phi}{dw}\right]^{-1} = \frac{1}{\pi w},$$

demostrando claramente que las espirales tienden a ser más cerradas cuando el límite $|w|$ tiende infinito. El valor de la integral

$$\int_{w_1}^{w_2} \exp(i\pi u^2/2)du = [C(w_2) - C(w_1)] + i[S(w_2) - S(w_1)] = Re^{i\phi},$$

está dado por la línea recta que conecta los puntos w_1 y w_2, i.e., éste puede ser tomado directamente desde la lectura de la gráfica. La intensidad difractada, proporcional a R^2, es la cantidad usual de interés, en cuyo caso sólo se requiere medir la longitud lineal entre dos puntos de la espiral.

EJEMPLOS: ÓPTICA GEOMÉTRICA Y ONDULATORIA

PR 4.1. Dos ondas idénticas en el espacio libre con longitud de onda λ_0 en fase viajan rutas paralelas una distancia *d.* La primera onda viaja una distancia d en aire y la segunda viaja una distancia d en un medio con índice de refracción n. Calcular la diferencia de fase entre las dos ondas después de recorrer una distancia *d.*

R. El tiempo de recorrido que le toma a la primera onda en el aire es: $t_1 = d/c$, mientras que para la onda que viaja en el medio con índice de refracción n es $t_2 = nd/c = nt_1$, mayor que t_1. La diferencia de tiempo entre las dos ondas es:

$$\Delta t = \frac{(n-1)d}{c}.$$

A la segunda onda le toma un tiempo mayor el recorrer la misma distancia, y la diferencia de fase asociada es $\Delta\phi = \omega\Delta t$:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n-1).$$

También puede considerarse la función de onda en el primer caso:

$$Y_1(d,t) = A\sin(k_0 d - \omega t);$$

mientras que en el segundo caso:

$$Y_2(d,t) = A\sin(kd - \omega t).$$

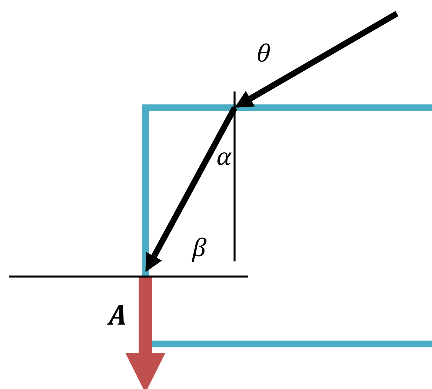
Con $k = nk_0$, la segunda onda toma la forma:

$$Y_2(d,t) = A\sin(nk_0 d - \omega t) = A\sin(nk_0 d - \omega t + k_0 d - k_0 d) = A\sin(k_0 d - \omega t + \Delta\phi).$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n-1).$$

4.1 *Ley de Snell.* Calcule el ángulo de transmisión para un rayo en el aire ($n_a = 1$) incidente a 30° con respecto a la normal de un bloque de vidrio con $n_v = 1.52$.
R. El ángulo de transmisión se obtiene aplicando la ley de Snell: **19.2**°.

4.2 *Un rayo de luz* que se desplaza en el aire incide sobre un bloque de hielo cuyo índice de refracción es 1.31. Cuál es el mayor ángulo de incidencia para el cual se presenta reflexión total interna en la cara lateral del bloque (Punto **A**)?



R. El ángulo crítico en la interfaz Hielo-Aire se obtiene desde la ley de Snell:

$$n_{hielo} \sin \beta_{crit} = 1, \quad \beta_{crit} = 49.76°.$$

Cualquier rayo de luz con ángulo de incidencia sobre la cara lateral de valor mayor o igual a 49.76° experimentará reflexión total interna. El valor de θ se obtiene aplicando la ley de Snell en la cara superior del bloque:

$$n_{aire} \sin \theta = n_{hielo} \sin \alpha = n_{hielo} \cos \beta.$$

En particular:

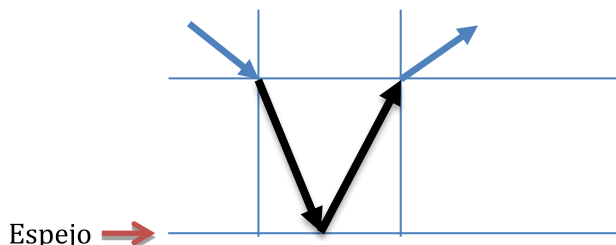
$$\sin \theta = 1.31 \cos \beta.$$

Reflexión total interna sucede cuando $\beta \geq \beta_{crit}$. El ángulo de mayor valor para el cual aparece reflexión total interna en la cara lateral es:

$$\theta = \arcsin(1.31 \cos 49.76) = 57.81°.$$

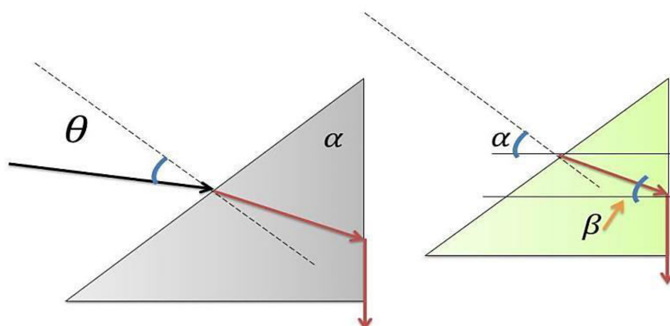
El valor de β_{crit} define el máximo valor del ángulo de incidencia para esta condición.

4.3 *Un recipiente lleno* de líquido cuyo índice de refracción es de 1.80 tiene un fondo de espejo que refleja la luz que le llega. Un haz de luz incide sobre la superficie superior del líquido (desde el aire) a un ángulo de 38° con respecto a la normal. Con qué ángulo (con respecto a la normal) saldrá el haz del líquido después de recorrer el líquido, reflejarse en el fondo y regresar a la superficie?



R. El ángulo de salida con respecto a la normal, después de aplicar sucesivamente la ley de Snell, es igual al ángulo de entrada: 38°. El ángulo del rayo de luz en el interior, con respecto a la normal es 20.0°.

4.4 *En la figura*, $\alpha = 45°$ y el índice de refracción del prisma es de 1.655. Cuál debe ser el valor de θ si el rayo alcanza el lado derecho del prisma y forma un ángulo igual al ángulo crítico?

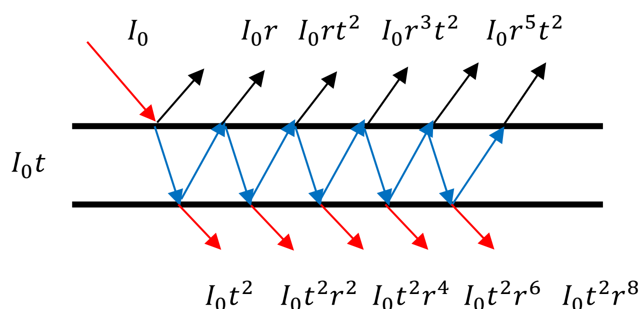


R. La trayectoria del haz que se propaga en el prisma se ilustra en la figura. El ángulo β debe satisfacer $\sin\beta = 1/n_p$, $\beta = 37.17°$. Con respecto a la normal del prisma y en el interior del mismo, el ángulo del haz refractado es $45° - 37.17° = 7.83°$. Sobre la cara diagonal del prisma se satisface de nuevo la ley de Snell:

$$\sin\theta = n_p \sin 7.83° ; \quad \theta = 13.03°.$$

El haz de luz debe incidir a unos 13° con respecto a la normal de la cara diagonal del prisma para producir reflexión total interna sobre la cara lateral.

4.5 *Reflexión Múltiple.* Considere dos superficies planas y reflectoras *infinitamente* delgadas, en posición paralela y separadas una distancia *d.* El índice de reflexión de cada una de las superficies es r y el índice de transmisión es t. Calcular la intensidad de todos los rayos reflejados y refractados. Considere que la luz incide perpendicularmente, o con ángulo pequeño.



R. Si un rayo incide con una intensidad I_0, éste se reflejará con una intensidad $I_0 r$ y se transmitirá con una intensidad $I_0 t$. La intensidad total de los rayos reflejados, excepto el primero, se calcula como:

$$I_0 r t^2 (1 + r^2 + r^4 + \cdots +) = I_0 r t^2 \left(\frac{1}{1 - r^2}\right) = I_0 r \left(\frac{1 - r}{1 + r}\right)$$

con $r < 1$ y $r + t = 1$. Incluyendo la intensidad del primer rayo reflejado, obtenemos:

$$I_0 \frac{2r}{(1 + r)}.$$

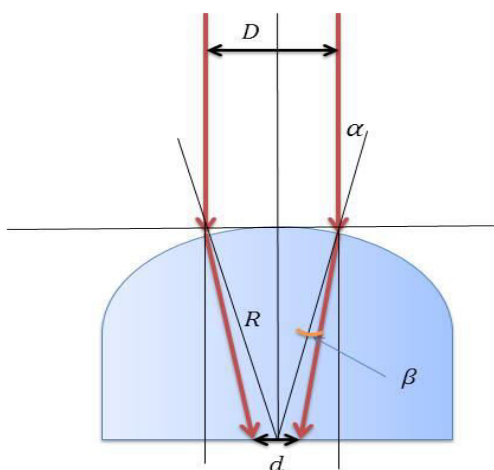
Análogamente, la intensidad total de los rayos refractados obedece la relación:

$$I_0 t^2 (1 + r^2 + r^4 + \cdots +) = I_0 \left(\frac{1 - r}{1 + r}\right).$$

La suma de estas dos últimas expresiones conduce al valor de la intensidad de la luz incidente I_0.

4.6 *Una semiesfera maciza de vidrio* que tiene un radio de 10 cm y un índice de refracción 1.5 está colocada sobre una mesa con su cara plana hacia abajo. Un haz de luz paralela cuya sección circular tiene 1 cm de diámetro, se propaga hacia abajo y penetra en la semiesfera a lo largo de su diámetro. Cuál es el diámetro del circulo luminoso formado sobre la mesa?

R. Considere el diagrama de rayos ilustrado en la figura.



El ángulo de entrada α del rayo incidente, con respecto a la normal, está dado por:

$$\sin \alpha = \frac{D}{2R},$$

en donde D es el diámetro del haz incidente y R es el radio de la semiesfera. El ángulo de refracción (con respecto a la normal) puede obtenerse desde la ley de Snell:

$$\sin\alpha = n_v \sin\beta.$$

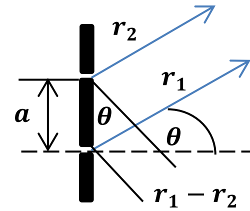
Con los datos numéricos, $\alpha = 2.87^0$, $\beta = 1.91^0$. Otra relación geométrica útil que relaciona los dos diámetros es:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{D-d}{2R\cos\alpha}.$$

Despejando para d:

$$d = D - 2R\cos\alpha\tan(\alpha-\beta) = \mathbf{0.667\ cm}.$$

El diámetro del haz incidente disminuye en un 33%.



4.7 *Dos aberturas* horizontales y paralelas separadas una distancia de 0.6 mm están iluminadas por un rayo de 500 nm como se ilustra en la figura. La luz que es difractada a ciertos ángulos θ exhibe interferencia constructiva, mientras que con otros ángulos se cancela. Hallar los tres ángulos más pequeños para los cuales existe interferencia (a) constructiva y (b) destructiva.
R. (a) La diferencia de fase asociada a la diferencia de caminos $a\sin\theta = r_1 - r_2$ se calcula como

$$\frac{2\pi\, a\sin\theta}{\lambda}.$$

Si la diferencia de fase es múltiplo entero de 2π, los ángulos para los cuales existe interferencia constructiva es:

$$\sin\theta = 0, \frac{\lambda}{a}, \frac{2\lambda}{a}.$$

Numéricamente, $\theta_0 = 0°, \theta_1 = 0.048°, \theta_2 = 0.095°$. (b) El patrón de interferencia destructiva aparece cuando la diferencia de fase es un múltiplo impar de π:

$$\frac{2\pi\, a\sin\theta}{\lambda} = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$$

Los ángulos en los cuales aparece un patrón de interferencia destructiva son:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2a}, \frac{3\lambda}{2a}, \frac{5\lambda}{2a}.$$

Numéricamente, $\theta_0 = 0.024°, \theta_1 = 0.072°, \theta_2 = 0.12°$.

4.8 Interferencia de luz de dos fuentes II. Luz roja de longitud de onda de 644 nm, desde una fuente puntual, pasa a través de dos rendijas paralelas y delgadas separadas 1 mm. Determinar la distancia entre la franja brillante central y la tercera franja oscura del patrón de

interferencia formada sobre una pantalla paralela al plano de las rendijas y localizada a una distancia de 1 m.

R. Utilizamos la relación anterior para el ángulo de refracción del sistema de doble rendija, con $m = 2$ (signo positivo en la fórmula anterior), y la geometría de la figura:

$$\sin\theta = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{d} \approx \frac{X}{L}$$

en donde $L = 1$ m. La distancia desde el franja brillante central y la tercera franja oscura es $X = 1.61$ mm.

4.9 *Fenómeno de Interferencia.* Dos antenas de radio que emiten señales en fase están en los puntos A y B separadas $d = 200$ m. Las ondas de radio tienen una frecuencia $f = 5$ MHz. Un receptor de radio se desplaza desde el punto B a lo largo de una perpendicular a la recta que une A y B (recta BC, en la figura). A que distancias de B habrá interferencia destructiva?.



En cualquier punto a una distancia x desde el punto B sobre la línea BC existe una diferencia de camino: $\Delta r = \sqrt{x^2 + d^2} - x$. Se produce interferencia destructiva cuando del desfase de las ondas recibidas sea un múltiplo impar de π, i.e., π, 3π, 5π... :

$$\text{k}\Delta r = \frac{2\pi f}{c}\Delta r = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$$

La ecuación para resolver x es:

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = \frac{c}{2f}, \frac{3c}{2f}, \frac{5c}{2f} \ldots$$

El mínimo de orden 1 de interferencia destructiva (a la derecha de B) aparece cuando x es:

$$x_1 = (4d^2 f^2 - c^2)/4cf = 651.7 \text{ m}.$$

El mínimo de orden 3 está localizado en $x_3 = 177.22$ m. Mínimo de orden 5 (el cual es el más cercano a la derecha de B) $x_5 = 58.33$ m.

4.10 *En un experimento de doble rendija*, $\lambda = 488$ nm, $L = 1.14$ m (la separación desde las rendijas a la pantalla), y la separación entre franjas oscuras consecutivas es $\Delta y = 6.1$ mm. Cuál es la separación entre las rendijas?.

R. La separación entre mínimos de interferencia consecutivos de orden n y $n - 1$ es:

$$\sin\theta_n - \sin\theta_{n-1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}.$$

En la aproximación de ángulos pequeños,

$$\sin\theta_n - \sin\theta_{n-1} \cong \frac{\Delta y}{L} = \frac{\lambda}{d}.$$

De esta última expresión obtenemos la distancia entre rendijas.

$$d = \frac{\lambda L}{\Delta y} = 91.5\ \mu\text{m}.$$

4.11 *Sobre la superficie* superior de una placa transparente incide luz desde el aire, con un ángulo θ_a. Las superficies de las placas son planas y paralelas entre sí. (a) Demuestre que $\theta_a = \theta'_a$. (b) Demuestre que el desplazamiento lateral d del haz emergente está dado por la relación

$$d = t\frac{\sin(\theta_a - \theta'_b)}{\cos\theta'_b},$$

En donde t es el espesor de la placa. (c) Un rayo de luz incide con un ángulo de 60° sobre la superficie de una placa de vidrio de 1.80 cm de grueso y 1.66 de índice de refracción. El medio en ambos lados de la placa es aire. Encuentre el desplazamiento lateral entre los rayos incidente y emergente.

R. (a) De las relaciones de Snell para el haz incidente: $n\sin\theta_a = n'\sin\theta'_b$, y para el haz emergente $n'\sin\theta'_b = n\sin\theta'_a$. Comparando estas dos últimas expresiones, tendremos $\theta_a = \theta'_a$. (b) Desde el triángulo formado por los vértices ⊿OO'P, el segmento $\overline{OP}$ es:

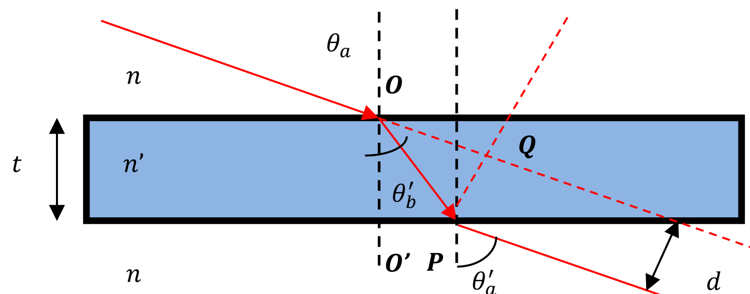
$$\overline{OP} = \frac{t}{\cos\theta'_b},$$

mientras que el segmento $\overline{PQ} = d$. En el triángulo ⊿OPQ se cumple

$$\sin(\theta_a - \theta'_b) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{d}{\dfrac{t}{\cos\theta'_b}}.$$

Despejando d

$$d = t\frac{\sin(\theta_a - \theta'_b)}{\cos\theta'_b}.$$



(c) Con los datos suministrados, $\theta'_b = 31.45°$ y $d = 1.0$ cm.

4.12 Ley de Snell. Un haz fino de luz blanca está dirigido hacia una placa plana de vidrio tipo Flint F2 con un ángulo de incidencia de 20° con la superficie de la placa. Debido a la dispersión en el vidrio, el haz se divide en un espectro visible. El índice de refracción del vidrio en función de la longitud de onda está representado gráficamente en la figura **1**. (a) Los rayos **A** y **B** de la figura **2** corresponden a los extremos del espectro visible. Cuál corresponde al rojo y cuál al violeta? (b) Calcular el espesor d de la placa de tal forma que el espectro tenga un ancho de 1.0 mm.

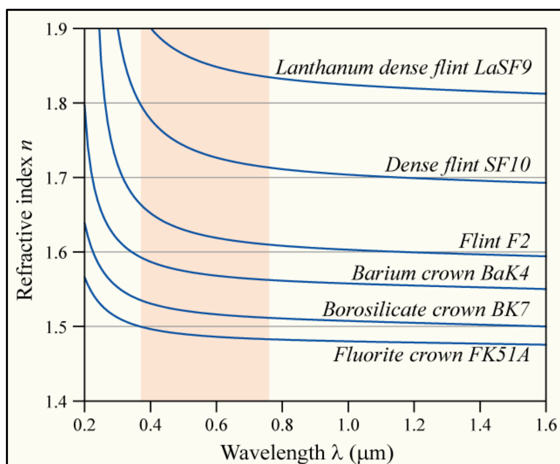


Fig. 1

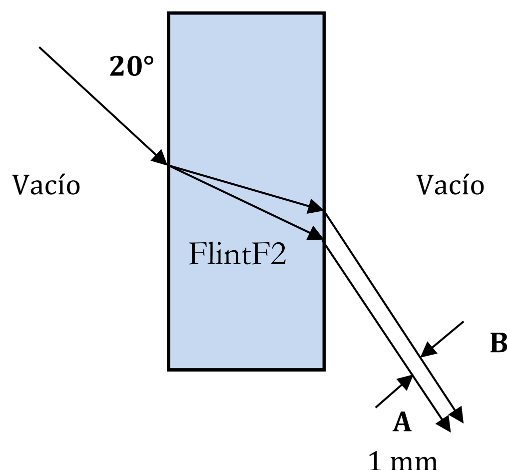


Fig. 2

R. En el caso (a), es suficiente con calcular el ángulo de refracción en el vidrio. Si el ángulo incidente es 70° (obsérvese que éste debe ser obtenido con respecto a la normal de la superficie) el ángulo de refracción en el vidrio es: $n_{vacío} \sin\theta = n_{vidrio} \sin\theta'$. Para la luz violeta, $\lambda = 400$ nm y $n_{vidrio} \sim 1.653$, mientras que para la luz roja $\lambda = 700$ nm, el índice de refracción del vidrio cambia a $n_{vidrio} \sim 1.61$. θ'es por lo tanto:

Luz Violeta:	**34.6°.**
Luz Roja:	**35.7°.**

El ángulo de separación del haz de salida con respecto a la normal asociado a la luz violeta es **menor (69.83°)** que el ángulo asociado a la luz roja **(69.967°)**. En la geometría de la figura 2, en conclusión tendremos:

Rayo B: Luz Violeta
Rayo A: Luz Roja.

Nótese que estos rayos tienen un ángulo de salida aproximadamente igual a ángulo de entrada de la luz blanca (70°). La diferencia reside en las pequeñas modificaciones que aparecen debido al cambio en el índice de refracción con la longitud de onda.

(b) La distancia $\Delta = 1$ mm entre los rayos paralelos A y B se obtiene adaptando la fórmula:

$$\Delta = d\left[\frac{\sin(\theta_a - \theta_b)}{\cos\theta_b} - \frac{\sin(\theta_a - \theta_b')}{\cos\theta_b'}\right],$$

en donde θ_a corresponde al ángulo de incidencia del haz de luz blanca (70°), y $\theta_b, (\theta'_b)$ el ángulo debido a la refracción producida por el haz de luz de violeta (roja) en el vidrio. Despejando d, se obtiene el espesor de la placa: $\boldsymbol{d = 21.7}$**mm.**

4.13 *Sistema de doble rendija.* Un sistema de doble rendija con un espacio de 0.15 mm y una lámpara de luz Sodio que produce una emisión brillante de 589 nm. Qué tan lejos de las rendijas debería colocarse una pantalla para observar franjas brillantes consecutivas y separadas 10 mm?.

R. La condición de Interferencia constructiva conduce a $d \sin\theta = \lambda$. El ángulo entre dos franjas brillantes consecutivas es:

$$\sin\theta_2 - \sin\theta_1 \approx \frac{\Delta y}{D} = \frac{\lambda}{d}.$$

La distancia de separación a la pantalla es:

$$D = \frac{d\Delta y}{\lambda} = 2.546 \text{ m}.$$

4.14 *Experimento de doble rendija.* En un experimento de doble rendija se utiliza luz monocromática de 563 nm de longitud de onda, donde la separación entre rendijas es de 0.18 mm. Cuáles son los ángulos que corresponden a los máximos $m = 1$ y $m = 2$?. Cuáles son los ángulos de los mínimos $m' = 1$ y $m' = 2$?.

R. Para el primer máximo de interferencia, la diferencia de fase debido a la diferencia de recorrido es 2π:

$$\Delta\phi = 2\pi,$$

$$\Delta\phi = k\Delta r = kd\sin\theta = 2\pi;$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d}; \quad \theta_1 = 0.179°.$$

Para el segundo máximo de interferencia $\Delta\phi = 4\pi$,

$$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d}; \quad \theta_2 = 0.358°.$$

El primer mínimo de interferencia ocurre cuando $\Delta\phi = \pi$,

$$\sin\theta'_1 = \frac{\lambda}{2d}; \quad \theta'_1 = 0.0895°.$$

mientras que el segundo mínimo de interferencia obedece la condición $\Delta\phi = 3\pi$,

$$\sin\theta'_2 = \frac{3\lambda}{2d}; \quad \theta'_2 = 0.2685°.$$

4.15 Difracción en Múltiples rendijas I. Una rejilla plana de difracción tiene 4000 ranuras/cm. Suponga incidencia normal. Las líneas α y δ emitidas por una luz proveniente de un gas de Hidrógeno tienen longitudes de onda de 656 nm y 410 nm respectivamente. Calcule la separación angular en grados de estas líneas en el espectro de primer orden.

R. Las líneas del espectro del gas Hidrógeno son características de los máximos de intensidad, con la relación: $d\sin\theta = m\lambda$, en donde d corresponde a la separación entre ranuras:

$$d = \frac{1}{4000/\text{cm}} = 2.5\times 10^{-6}\text{ m}.$$

Para el espectro de primer orden $m\ =\ 1$ y $\Delta\theta{\sim}\Delta\lambda/d = 5.64°$ con $\sin\theta{\sim}\theta$.

4.16 Difracción en Múltiples rendijas II. Un haz delgado de luz amarilla de 600 nm incide normalmente en una rejilla cuya etiqueta indica 2000 líneas/cm y cuya imagen se forma sobre una pantalla paralela localizada a 1 m de distancia. Calcular la distancia a lo largo de la pantalla desde la línea brillante central a las líneas de primer orden.

R. Una rejilla de difracción (*diffraction grating*) es un arreglo repetitivo de aperturas u obstáculos que altera la amplitud o fase de una onda. Esta rejilla consiste usualmente de un gran número rendijas o montículos paralelos y uniformes igualmente espaciados a una distancia a. Cuando ondas de longitud de onda λ inciden normalmente sobre la rejilla de difracción, los máximos son observados en ángulos θ_m con respecto a la normal están definidos por la ecuación:

$$m\lambda = a\sin\theta_m,$$

en donde $m\ = 1{,}2\ \ldots$es el orden de la imagen difractada. Esta misma relación aplica para los máximos principales en el patrón de interferencia incluso para sistemas de dos o tres rendijas. Sin embargo el patrón puede volverse bastante complejo si las rejillas son suficientemente anchas de tal forma que en una sola rejilla de difracción contenga varios mínimos de interferencia. La distancia entre el máximo central y la línea de primer orden es:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{600\text{ nm}}{5000\text{ nm}} = 0.12,$$

$$y = X\tan\theta \sim X\sin\theta = (1)\times 0.12\text{ m},$$

en donde X es la distancia a la pantalla.

4.17 Una luz monocromática de longitud de onda de 620 nm, proveniente de una fuente alejada, pasa por una ranura de 0.450 mm de ancho. La configuración de difracción se observa en una pantalla situada a 3 m de la ranura. En términos de la intensidad I_0 en el pico del máximo central, calcular la intensidad de la luz en la pantalla a las siguientes distancias con respecto al máximo central: (a) 1 mm, (b) 3 mm.

R. La intensidad en cualquier punto sobre la pantalla está dada por:

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

con $\alpha = \pi\, a\sin\theta\,/\lambda$. En la aproximación de ángulo pequeño, usual en estos casos, tendremos:

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{D};$$

en donde y es la distancia desde el centro de la pantalla (posición del pico del máximo central) y D es la distancia desde la ranura a la pantalla. La intensidad en cualquier punto de la pantalla se aproxima a:

$$I(y) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a y}{D\lambda}\right)}{\frac{\pi a y}{D\lambda}} \right)^2.$$

En el caso (a) y = 1 mm

$$I = 0.82 I_0$$

Y en el caso (b) y = 3 mm

$$I = 0.11 I_0$$

4.18 ***Espejo Cóncavo***. Un espejo cóncavo debe formar una imagen del filamento de un faro de un automóvil en una pantalla que se encuentra a 3.20 m del espejo. El filamento tiene una altura de 5 mm y la imagen debe tener una altura de 35 cm. (a) En qué posición enfrente del vértice del espejo debe colocarse el filamento? (b) Cuál debe ser el radio de curvatura del espejo?.

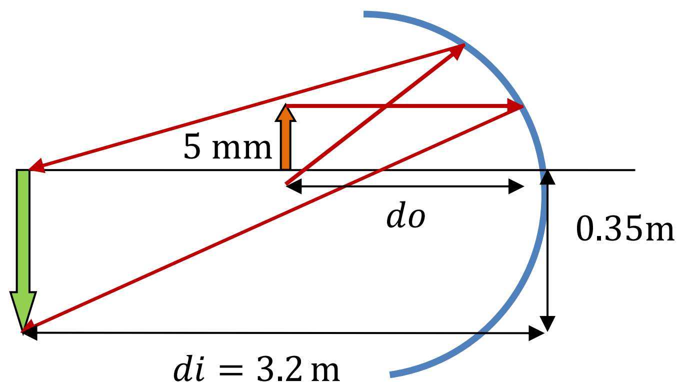
R. (a) Utilizando la fórmula de magnificación, es posible obtener la distancia objeto desde el vértice del espejo:

$$m = -\frac{y'}{y} = -\frac{0.35}{0.005} = -70.$$

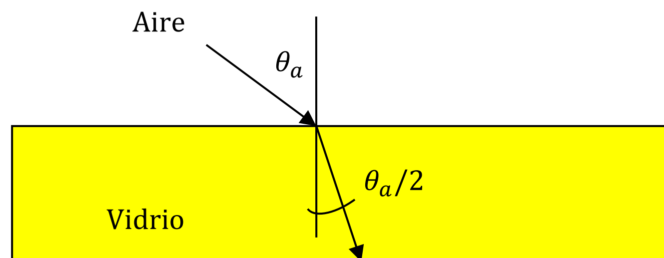
La distancia objeto es: $d_0 = 3.2/70 = 4.57$ cm. (b) La distancia focal se obtiene por la fórmula:

$$\frac{1}{0.0457} + \frac{1}{3.2} = \frac{1}{f}; \qquad f = 4.51 \text{ cm}; \quad R = 2f = 9.01 \text{ cm}.$$

Diagrama de rayos, espejo cóncavo.



4.19 *Un haz de luz* en el aire incide sobre una placa de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.62. Cuál es el ángulo de incidencia θ_a con esta placa para el cual el ángulo de refracción es $\theta_a/2$, medida con respecto a la normal?.



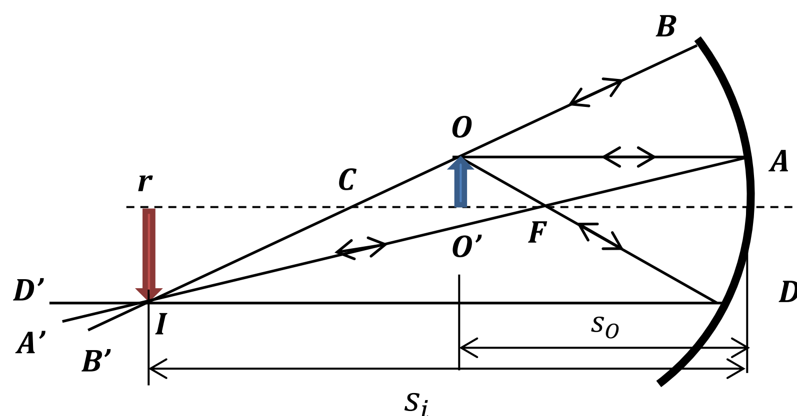
R. Utilizando la ley de Snell, tenemos

$$n_a \sin(\theta_a) = n_v \sin\left(\frac{\theta_a}{2}\right).$$

Despejando el ángulo de incidencia:

$$\theta_a = 2\cos^{-1}(n_v/2n_a), \qquad \theta_a = 71.8.$$

4.20 Espejo Cóncavo. El espejo cóncavo mostrado en la figura tiene un radio de curvatura de 4 m. Un objeto *OO*' de 5 cm de altura, es colocado a 3 m al frente del espejo. Por (a) construcción y (b) por cálculo, determine la posición y la imagen I en I'.



R. (a) El rayo *OA*, es paralelo al eje principal. Este rayo, como todos los rayos paralelos, es reflejado a través del foco principal *F* en la dirección *AFB'*. El rayo *OB* es normal al espejo y se refleja en la dirección inversa *BCB'* pasando a través del centro de curvatura *C*. El rayo *OFD* el cual pasa a través del foco *F*, y como todos los rayos que pasan a través del foco *F*, es reflejado en dirección paralela del eje principal *DD'*. La intersección I de dos rayos cualquiera es la imagen de O. La imagen es real, invertida, aumentada y a una distancia mayor que la del objeto, medida desde el espejo. (b) Utilizando la ecuación del espejo,

$$\frac{1}{s_O} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{R} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{4}.$$

Resolviendo para s_i, $s_i = 6$ cm. La imagen es real (dado que s_i es positivo) y localizada a 6 m desde el espejo. El tamaño de la imagen se define por:

$$\frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}} = \left|\frac{s_i}{s_O}\right| = \left|\frac{6 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right| = 2.$$

Es decir, la altura de la imagen es de 10 cm.

4.21 Tamaño de la Luna (en la tierra). El diámetro de la Luna es de 3,480 km y su distancia a la Tierra es de 386,000 km. Encuentre el diámetro de la imagen de la Luna formada por un espejo de telescopio cóncavo de 1.85 m de longitud focal.



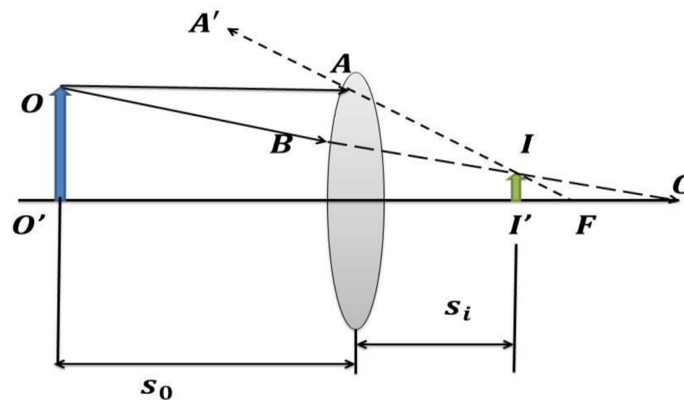
science.howstuffworks.com

R. Dada la gran distancia a la que se encuentra la Luna, la imagen de ésta se forma en el foco del espejo, y el aumento lateral es:

$$m = \frac{s'}{s} \approx \frac{f}{s} = \frac{1.85}{386{,}000{,}000} = 4.8 \times 10^{-9}.$$

El diámetro de la imagen es: $d' = md = 0.0167$ m (1.67 cm).

4.22 Espejo convexo. Un objeto de 6 cm está localizado a 30 cm al frente de un espejo esférico convexo de 40 cm de radio. Por (a) construcción y (b) por cálculo, determine la posición y el tamaño de la imagen *I* en *I'*.



R. (a) Seleccionemos convenientemente dos rayos provenientes de O: El rayo OA, paralelo al eje principal, es reflejado en la dirección AA' como si éste pasara por el foco principal F. El rayo OB, dirigido a través del centro de curvatura C, es normal al espejo y se refleja en sentido contrario en dirección CBO. Los rayos reflejados AA' y BO no se encuentran nunca, pero parecen originarse desde el punto I detrás del espejo. Por lo tanto, II' representa el tamaño y la posición de la imagen OO'. (b) Utilizando la ecuación del problema ***4.20***, se obtiene una imagen virtual localizada a $s_i = -12$ cm, reducida en tamaño (2.4 cm), no invertida y generada por un objeto real en frente del espejo. Todas las imágenes formadas por espejos convexos son virtuales, no invertidas y reducidas en tamaño.

4.23 *Actividad Óptica.* Suponga que en la trayectoria de un haz ingresa a un sistema de N polarizadores ideales. El haz incidente en el polarizador 1 es plano polarizado, y el eje de transmisión del polarizador 1 está girado un ángulo θ/N respecto al anterior en el mismo

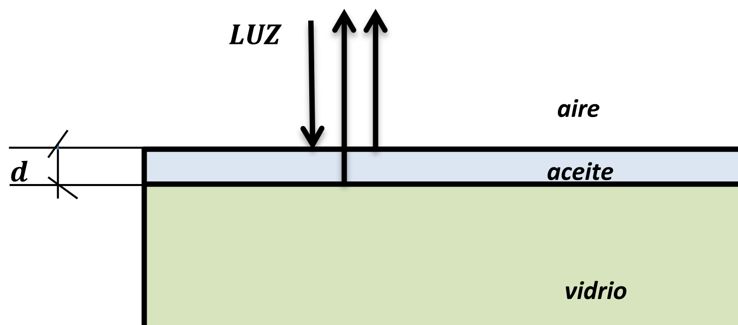
sentido, de modo que el último polarizador tiene su eje girado un ángulo θ con respecto al plano de polarización 1. (a) Hallar la intensidad transmitida después del último polarizador, considerando a I_0 como la intensidad del haz incidente. (b) Determine I/I_0 para el caso donde $\theta = \pi/2$ rad, $N = 10$, (c) $N = 100$ y (d) $N = 1000$. Algunas sustancias, como una solución de azúcar en agua, pueden girar el plano de polarización de un haz polarizado sin una reducción notable de la intensidad de dicho haz. Este fenómeno se denomina *actividad óptica.*
R. (a) Después que el haz sobrepasa el primer filtro, la intensidad que emerge de éste es:

$$I^{(1)} = I_0 \cos^2\left(\frac{\theta}{N}\right).$$

Después de atravesar el segundo filtro, la intensidad resultante es: $I^{(2)} = I^{(1)}\cos^2(\theta/N) = I_0 \cos^4(\theta/N)$, dado que θ/N es el ángulo relativo de polarización entre filtros consecutivos. Después de atravesar N filtros, la intensidad toma el valor

$$I^{(N)} = I_0 \cos^{2N}\left(\frac{\theta}{N}\right).$$

(b) $I^{(10)}/I_0 = 0.781$, (c) $I^{(100)}/I_0 = 0.975$, (d) $I^{(1000)}/I_0 = 0.9975$.



4.24 *Interferencia en una capa de aceite.* Luz azul de 480 nm se refleja fuertemente en una película de aceite sobre una lámina de vidrio cuando ésta es vista con un ángulo cercano al de incidencia normal. Asumiendo que el índice de refracción del aceite es 1.2 y que el del vidrio es 1.6, cuál es el mínimo espesor de la película de aceite (diferente de cero)?.
R. Si la luz incide normalmente (desde el aire) sobre la película de aceite, la luz reflejada experimentará interferencia constructiva con la luz incidente, si la diferencia de fase y la diferencia de camino obedecen: $\Delta\phi = 2\pi$, $\Delta\phi = k\Delta r$. En este caso $\Delta r = 2d$, en donde d corresponde al espesor de la película de aceite, y $k = 2\pi/\lambda$. Combinando estas expresiones, el espesor es: $d = \lambda/2$, en donde λ es la longitud de onda en el medio (aceite). Finalmente: $\lambda = \lambda_{aire}/n_{aceite}$. Reemplazando, $d = 200$ nm. Nótese que el resultado es el mismo si la luz incide desde el vidrio. *Nota*: La amplitud de la onda emergente resultante debido a dos ondas iguales en amplitud con una diferencia de fase $\Delta\phi$ puede obtenerse desde la expresión: $\psi_r = 2\psi_0 \cos(\Delta\phi/2)$, en donde ψ_0 corresponde a la amplitud de una de las ondas. Claramente, tendremos interferencia constructiva si $\Delta\phi = 0{,}2\pi$, 4π ..., mientras que si $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi$ ...existirán mínimos de interferencia destructiva, en este caso especial en donde $n_{aire} < n_{aceite} < n_{vidrio}$.

La condición general de interferencia en películas delgadas con luz incidente normalmente puede resumirse en la siguiente tabla:

Cambio de Fase	0	π
Interferencia Constructiva	$2nd = m\lambda$	$2nd = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$
Interferencia Destructiva	$2nd = \left(m - \frac{1}{2}\right)$	$2nd = m\lambda$

La tabla anterior debe entenderse bajo las siguientes condiciones:

1) $m = 1,2,3 \ldots$ valores enteros positivos.
2) d: Espesor de la película.
3) n: Indice de refracción de la película.
4) λ: Longitud de onda de la radiación incidente.
5) Cambio de fase *total* igual a **0**: La onda viaja desde un medio con un índice de refracción de mayor valor hacia otro medio con índice de refracción de menor valor. El cambio de fase de la onda debido a los efectos de interfaz en este caso es igual a cero (**0**).
6) Cambio de fase *total* igual a **π**: La onda viaja desde un medio con un índice de refracción de menor valor hacia otro medio con índice de refracción de mayor valor. El cambio de fase de la onda debido a los efectos de interfaz en este caso es igual a (**π**).
7) El ángulo de incidencia es cero (Incidencia normal).

4.25 *Lentes.* Una lente de vidrio cuyo índice de refracción es $3/2$ tiene la distancia focal de 10 cm. ¿Cuál será la distancia focal de esta lente, si la colocamos en el agua. El índice de refracción del agua es $4/3$ y del aire es 1.

$f_{aire} = 10$ cm
$n_{vidrio} = 3/2$
$n_{agua} = 4/3$
$n_{aire} = 1$

Aplicando la fórmula del constructor de lentes:

$$\frac{1}{f_{aire}} = \left(\frac{n_{vidrio}}{n_{aire}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

en donde *R* corresponde a los radios de curvatura de la lente (no conocidos) , y *n* es el índice de refracción de los medios, se obtiene para en el primer caso *faire,* la distancia focal de la lente en el aire. La distancia focal de la lente en el agua, es:

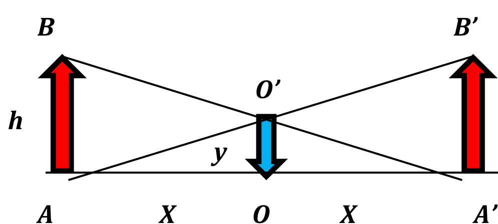
$$\frac{1}{f_{agua}} = \left(\frac{n_{vidrio}}{n_{agua}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Combinando estas dos expresiones:

$$f_{agua} = f_{aire}\frac{n_{agua}}{n_{aire}}\left(\frac{n_{vidrio}-n_{aire}}{n_{vidrio}-n_{agua}}\right) = 40 \text{ cm.}$$

4.26 Interferencia en un medio líquido. Una doble rendija produce franjas de interferencia de la luz Sodio (589 nm) separadas 0.20°. Cómo cambia esta separación si el dispositivo se sumerge en agua, con el índice de refracción del agua como $n = 4/3$?

R. En el aire, con índice de refracción $n = 1$, la relación entre dos franjas de interferencia es: $d\Delta\theta = \lambda$, en donde d corresponde a la separación entre las rendijas, y λ es la longitud de onda de la fuente de luz Sodio en el aire, $d = 0.169$ mm. En el agua, con $n = 4/3$, la longitud de onda de la luz cambia como: $\lambda/n = 441.75$ nm, y la separación angular es: $\Delta\theta = 0.1497°$, utilizando el mismo valor de d (invariable).



4.27 Cuál es el tamaño del mínimo espejo vertical en el cual el observador de pie puede ver su imagen completa?

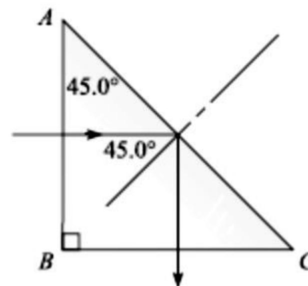
R. Considere el diagrama de rayos que proviene de un observador de altura h. El rayo que proviene de un punto en el extremo superior B del observador se refleja en el extremo superior O' del espejo y llega exactamente al punto A en el extremo inferior del observador. La imagen $A'B'$ formada por detrás del espejo proviene realizando extensiones de las líneas incidentes y reflejadas por delante del mismo.

En un espejo plano, la imagen se forma a la misma distancia de la ubicación del observador X *(sin considerar los efectos de refracción producidos por el vidrio)*. El tamaño mínimo necesario del espejo para que se forme la imagen completa se obtiene de la relación trigonométrica

$$\tan\beta = \frac{h}{2X} = \frac{y}{X}; \qquad y = \frac{h}{2}.$$

El tamaño del espejo debe ser igual a la mitad de la altura del observador.

4.28 Prisma 45°. Cuál es el mínimo valor del índice de refracción para un prisma de 45° el cual es utilizado para desviar un haz de luz por reflexión total interna a través de un ángulo recto, como se ilustra en la figura?.

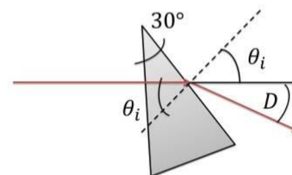


R. El rayo incide normalmente en el prisma sin desviación sobre la cara AB. En la cara AC, el rayo incide a un ángulo de 45° con respecto a la normal. El ángulo crítico del prisma debe ser igual a 45° para que exista reflexión total interna a un ángulo recto, como se ilustra en la figura. Aplicando la ley de Snell

$$n_{prisma}\sin 45° = n_{aire}\sin 90°,$$

Considerando $n_{aire} = 1$, el índice de refracción del prisma debe ser de $n_{prisma} = 1.41$.

4.29 Prisma 30°. Un prisma de vidrio tiene un índice de refracción de 1.55. Hallar el ángulo de desviación D en este caso.



R. El haz de luz incide normalmente sobre una de las caras del prisma, e incide con un ángulo θ_i con respecto a la normal de la cara por donde el haz emerge. Simple geometría indica que $\theta_i = 30°$, mientras que el ángulo de refracción se calcula utilizando la ley de Snell:

$$n_{prisma} \sin 30° = n_{aire} \sin \theta_t.$$

Insertando los valores: $\theta_t = 50.80°$. El ángulo D es por lo tanto: $D = 50.8° - 30° = 20.8°$.

4.30 Espejo convexo. Un objeto está a 21 cm del centro de una esfera de Navidad plateada de 8 cm de diámetro. Cuál es la posición y aumento de su imagen?

R. La distancia objeto es 21 cm – 4 cm=17 cm. La posición de la imagen se obtiene desde la fórmula de espejos esféricos:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{2}{R}$$

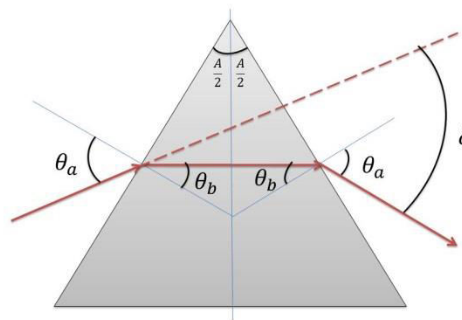
$$i = \frac{oR}{2o - R} = \frac{(0.17 \times (-0.04))}{(2 \times 0.17) - (-0.04)} = -0.0179 \text{ m } (-1.79 \text{ cm})$$

El aumento lateral es

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{(-1.79 \text{ cm})}{(17 \text{ cm})} = 0.105.$$

La imagen formada es positiva (no invertida) y de 0.105 veces el tamaño original del objeto.

4.31 Incidencia simétrica en un Prisma. El ángulo de incidencia θ_a de la figura se elige de modo que la luz pase simétricamente a través del prisma que tiene un índice de refracción n y un ángulo "cúspide" A. Hallar el ángulo de desviación δ, el cual es el ángulo entre la dirección inicial de incidencia y el ángulo final de salida del rayo. Hallar un valor numérico para $A = 60°$, $n = 1.60$ (luz roja de 700 nm).



R. Utilizando la ley de Snell,

$$\sin \theta_a = n \sin \theta_b,$$

el cual constituye la primera relación entre los ángulos de incidencia y refracción. En la geometría ilustrada, $\theta_b = A/2$. El ángulo de salida del rayo simétrico con respecto a la horizontal es $\theta_a - \theta_b$, mientras que el ángulo del rayo incidente con respecto a la horizontal es

$\theta_a - \theta_b$. El ángulo de desviación δ se obtiene como el doble de esta diferencia $\delta = 2(\theta_a - \theta_b)$, el cual conduce a una relación para θ_a:

$$\theta_a = \frac{\delta}{2} + \theta_b = \frac{\delta}{2} + \frac{A}{2}.$$

Finalmente: $\sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$. Numéricamente, para luz incidente de 700 nm, $\delta = 46.26°$.

4.32 Espesor aparente. Un espejo está construido con una placa de vidrio de 1 cm de espesor ($n = 1.5$) y cubierto con una capa de pintura plateada y brillante en su parte posterior. Una persona está ubicada a 50 cm desde la parte frontal del espejo. Si ésta persona observa perpendicularmente el espejo, a qué distancia por detrás de la cara frontal del espejo aparecerá la imagen?

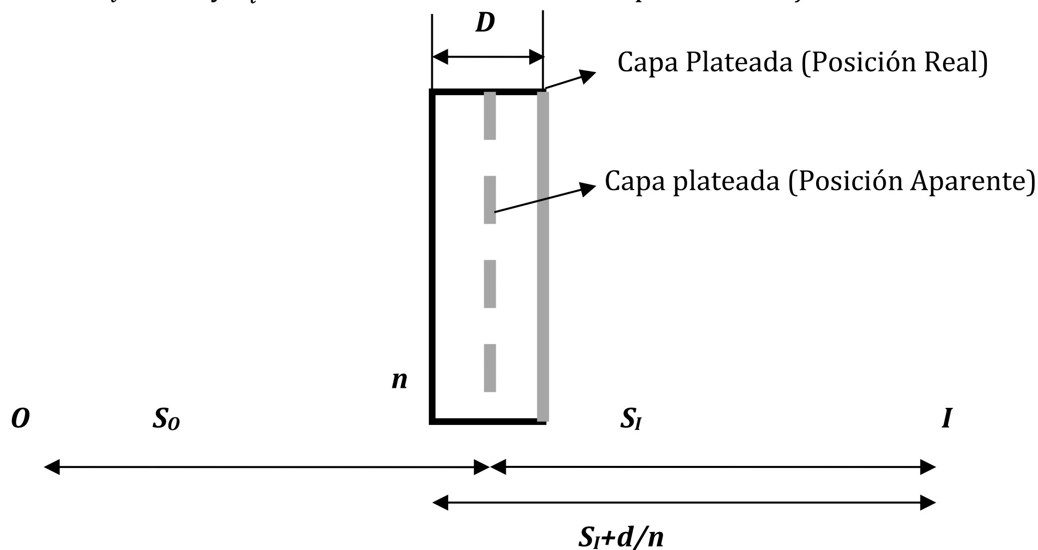
R. En un espejo sin espesor, la imagen formada aparecería a la misma distancia de la localización del objeto. Si se considera su espesor igual a d, el espesor "aparente" debido a los efectos de la refracción de la luz en el medio, está definido como $d(\text{aparente}) = d(\text{real})/n$, en donde n es el índice de refracción. Así, una persona desde fuera del sistema observará la capa plateada (La cual es la que en efecto produce el reflejo) a una distancia de sólo 0.66 cm desde la parte frontal del vidrio. La distancia a la cual se forma la imagen desde la cara frontal del espejo es por lo tanto 50.66 cm + 0.66 cm, ó 51.3 cm (Ver figura). En la figura, S_O corresponde a la distancia desde la ubicación de una persona en ***O*** hasta la capa plateada, mientras que $S_I = S_O$ es la distancia a la cual se forma la imagen por detrás de esta misma capa. Desde la cara frontal del espejo, finalmente la imagen ***I*** estará localizada a una distancia $S_I + d/n$.

4.33 Distancia Focal, Espejo Cóncavo. Cuando un objeto inicialmente a 60 cm de un espejo cóncavo se acerca 10 cm a él, la distancia entre el objeto y su imagen se hace 2.5 veces mayor. Determinar la distancia focal del espejo.

R. Como la distancia focal del espejo es la misma, entonces, con $1/d_o + 1/d_i = 1/f$, tendremos:

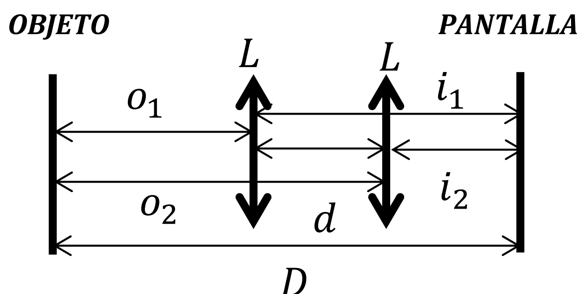
$$\frac{d_i + 0.6}{0.6 d_i} = \frac{d_i' + 0.5}{0.5 d_i'},$$

en donde d_i y d_i' corresponden a las distancias imagen para distancias objeto de 60 cm y 50 cm, respectivamente. La segunda ecuación corresponde a la distancia imagen-objeto antes y después del acercamiento: $d_i' - 0.5 = 2.5(d_i - 0.6)$. Resolviendo simultáneamente para d_i y d_i', obtenemos: $d_i = 1$ m y $d_i' = 1.5$ m. La distancia focal es por lo tanto: $f = 0.375$ m.



Ejercicio: Espesor Aparente

4.34 *Un objeto luminoso* y una pantalla están separados una distancia D. (a) Demostrar que una lente convergente, de distancia focal f, forma una imagen real en la pantalla en dos posiciones que se encuentran separadas una distancia: $d = \sqrt{D(D-4f)}$.



R. Obsérvese la construcción en el diagrama adjunto. Para las dos posiciones de la lente, se cumple para la imagen $i = D - o$. Utilizamos la fórmula de la lente $1/i + 1/o = 1/f$. Reemplazando la primera ecuación, obtenemos una expresión para la distancia objeto *o:*

$$o^2 - oD + fD = 0.$$

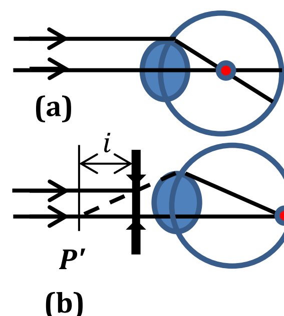
Resolviendo para ***o:***

$$o_1 = \frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D(D-4f)}}{2},$$
$$o_2 = \frac{D}{2} + \frac{\sqrt{D(D-4f)}}{2}.$$

La distancia entre las dos posiciones de la imagen es: $d = \sqrt{D(D-4f)}$. El método inverso, i.e. el cálculo de la distancia focal de la lente desde los parámetros D y d se conoce como *Método de Bessel*):

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D}.$$

4.35 Ojo miope I*.* El punto remoto de un cierto ojo está 1 m por delante del mismo. ¿Qué lente ha de utilizarse para ver claramente un objeto situado en el infinito?



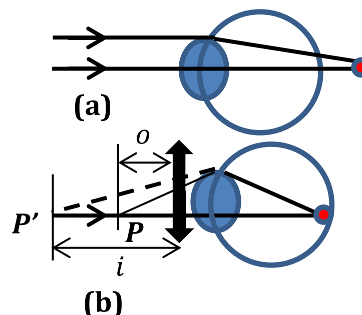
R. El ojo miope forma la imagen de un objeto distante delante de la retina y no sobre ella Fig. (a). La corrección de este defecto se logra utilizando lentes oftalmológicas divergentes Fig. (b). La lente divergente forma la imagen virtual de un objeto en el punto ***P'***. Este punto es el foco primario del lente, dado que los rayos incidentes llegan desde el infinito. Debe elegirse una lente cuyo foco coincide con el punto remoto del ojo ***P'***.

Supongamos que la lente está muy cerca del ojo y despreciamos la distancia entre el ojo y la lente. La distancia objeto $o = \infty$. La distancia imagen $i = -100$ cm. Utilizando la fórmula de la lente, se calcula la distancia focal:

$$f = \frac{i}{1 + \frac{i}{o}} = \frac{-100}{1 - \frac{100}{\infty}} = -100 \text{ (cm)}.$$

La distancia focal es negativa. La lente es divergente. Para la corrección de la miopía se utiliza lentes oftalmológicas divergentes.

4.36 Ojo hipermétrope I. Un punto próximo de cierto ojo está 100 cm por delante del mismo. Qué lente habrá de usarse para ver claramente un objeto situado a 25 cm del ojo?.



R. La potencia óptica del cristalino del ojo se puede variar modificando la curvatura de su superficie mediante la acción de los músculos filiares. Con la variación de la potencia óptica del cristalino es posible enfocar las imágenes de objetos a distintas distancias del ojo. Este proceso se conoce como *acomodación.*
Los puntos límites entre los cuales es posible la acomodación se denominan "punto remoto" y "punto próximo". Para el ojo normal, el punto remoto se encuentra en el infinito, mientras que el punto próximo se encuentra a una distancia aproximada de 25 cm. La hipermetropía se debe a que los rayos paralelos que inciden sobre el ojo sin acomodar convergen detrás de la retina (Fig. a), es decir que el punto remoto se encuentra detrás del ojo, mientras que el punto próximo se encuentra a una distancia mayor de 25 cm del ojo. La lente converge los rayos salientes del objeto que se encuentra en el punto ***P*** y forma una imagen virtual del objeto en el punto ***P'*** que corresponde al límite de la acomodación del ojo. Es como si el objeto que el ojo observa no está en el punto P sino en el punto ***P'***, que es el punto próximo del ojo. El problema consiste en calcular la distancia focal de la lente para que la imagen se forme exactamente en el punto próximo del ojo. En el problema despreciamos la distancia entre el ojo y la lente. Para la lente, la distancia objeto $o = 25$ cm, y la distancia imagen $i = -100$ cm negativa (imagen virtual).

$$f = \frac{oi}{o+i} = \frac{(25)(-100)}{25-100} = 33.3 \text{ cm (3 dioptrías)}$$

La distancia focal es positiva. La lente es convergente. Para la corrección de la hipermetropía se debe utilizar las lentes oftalmológicas convergentes.

4.37 Ojo Hipermétrope II. Un hombre tiene su punto próximo a 60 cm. Qué lentes debe utilizar?

R. La distancia al punto próximo de una persona con visión normal es de unos 25 cm, el hombre padece de hipermetropía y es necesario acercarle el punto próximo a su valor normal utilizando una lente convergente. La distancia focal de la lente adecuada en este caso se calcula como:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d'},$$

en donde $d = 25$ cm y $d' = 60$ cm. La distancia d' es negativa dado que la lente debe producir una imagen virtual que al paciente le parezca que se encuentra en su antiguo punto próximo y así capaz de formar la imagen sobre la retina. La distancia focal es $f = 42.86$ cm, con una potencia del lente $P = 1/f\text{(metros)} = 2.33$ dioptrías.

4.38 *Un hombre utiliza lentes* de distancia focal +75 cm. Donde está situado su punto próximo?
R. En este caso se cumple:

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f},$$

en donde d = 25 cm es la distancia de visión normal de un punto próximo y $d´$ la distancia de visión defectuosa. Resolviendo, $d' = 37.5$ cm (hipermetropía).

4.39 *Ojo Miope II.* Un hombre sólo puede ver con nitidez objetos situados entre 25 cm y 400 cm delante de él. Cuál es el poder útil de acomodación de sus ojos?. Que lentes debe usar?. Cuál es la distancia mínima la cual debe colocar un libro delante de sus ojos, mientras utiliza estas lentes?.
R. El poder útil de acomodación del ojo se obtiene del inverso de la diferencia entre estas dos distancias:

$$P_{400} = \frac{1}{400} + \frac{1}{D}; \quad P_{25} = \frac{1}{25} + \frac{1}{D}$$

en donde D es la distancia entre el cristalino y la retina, aproximadamente igual al diámetro del ojo, unos 2.3 cm. El poder útil está dado por (distancias en metros):

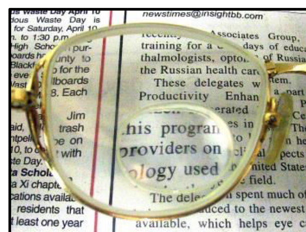
$$P_{25} - P_{400} = 3.75 \text{ dioptrías}$$

En un ojo con visión normal, este poder útil se estima en 4 dioptrías. Un objeto localizado en el infinito ha de producir una imagen virtual en la lente prescrita que localizada en el punto remoto del ojo en estado de relajación. La distancia focal del lente que se requiere es $f = -400$ cm (0.25 dioptrías). La lente es divergente con una distancia focal igual en magnitud a la distancia del punto remoto. La distancia mínima a la cual debe colocar el libro, con máxima acomodación del ojo es:

$$-\frac{1}{400} = \frac{1}{d} - \frac{1}{25}, \quad d = 26.67 \text{ cm.}$$

La imagen virtual proporcionada por la lente ha de estar localizada en el punto próximo del ojo (25 cm). La distancia focal es negativa en este caso, el paciente tiene condición de miopía.

4.40 *Lente bifocal*. Un paciente es prescrito con lentes bifocales, cuyas componentes tienen distancias focales de 40 cm y -300 cm. Dónde están situados los puntos próximos y remoto del paciente?
R. Para la corrección de la hipermetropía, el lente debe ajustar la imagen al punto próximo. Para un paciente con visión normal: $d = 25$ cm, y en este caso:



http://www.eyeassociates.com

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}, \qquad d' = 66.7 \text{ cm.}$$

Es decir, el punto próximo del paciente está localizado a 66.7 cm, el cual puede corregirse con una lente convergente de 2.5 dioptrías. El defecto de miopía puede corregirse con una lente divergente de 0.3 dioptrías, y el punto remoto del ojo se localiza a 3 m.

4.41 Presbicia. A un paciente que padece presbicia se le han prescrito lentes de 2 dioptrías para que pueda leer un libro situado a 25 cm de él. Algunos años después no puede leer cómodamente a menos que coloque el libro a 35 cm de sus ojos. Qué lentes necesita ahora?

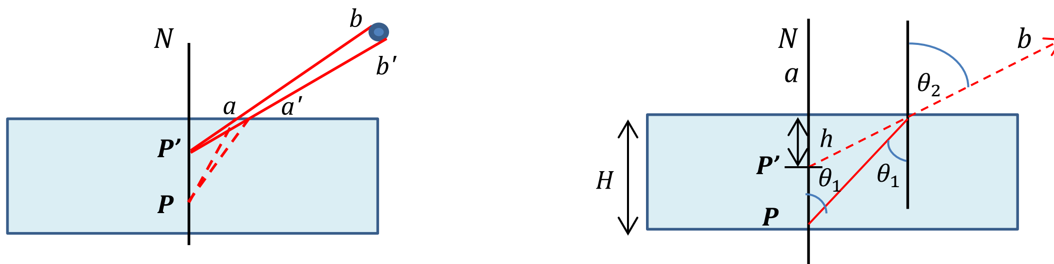
R. La presbicia (*vista cansada*) es el resultado de la pérdida de capacidad de acomodación del ojo debido a la pérdida de elasticidad del cristalino, la cual ocurre generalmente después de los 40 años en toda población. Esta condición impide leer textos situados a distancias cortas, los cuales se ven desenfocados y borrosos, y el paciente necesita alejarse para verlos con nitidez, pero al hacerlo no puede distinguir las letras y precisa gafas para la lectura y la visión a distancias cortas. Se utilizan lentes convexas con una graduación adecuada que oscilan entre 1 y 3 dioptrías. Este caso se trata de forma semejante al caso de hipermetropía. Inicialmente el paciente tiene un punto próximo de 50 cm el cual coincide con la distancia focal del lente. Es posible calcular en nuevo punto próximo, con los "*antiguos*" lentes:

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{35} - \frac{1}{50}, \qquad d' = 116.7 \text{ cm.}$$

Al corregir esta condición, la distancia focal de la nueva lente debe ser (d = 25 cm (posición original del objeto), $d' = 116.7$ cm):

$$\frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d'}, \qquad \bar{f} = 31.82 \text{ cm (3.143 dioptrías).}$$

4.42 Objeto en un estanque. Un objeto se encuentra sumergido en un estanque de agua ($n = 1.33$) a una profundidad H. Si miramos desde arriba hacia abajo y en dirección vertical, ¿a qué profundidad vemos el objeto?

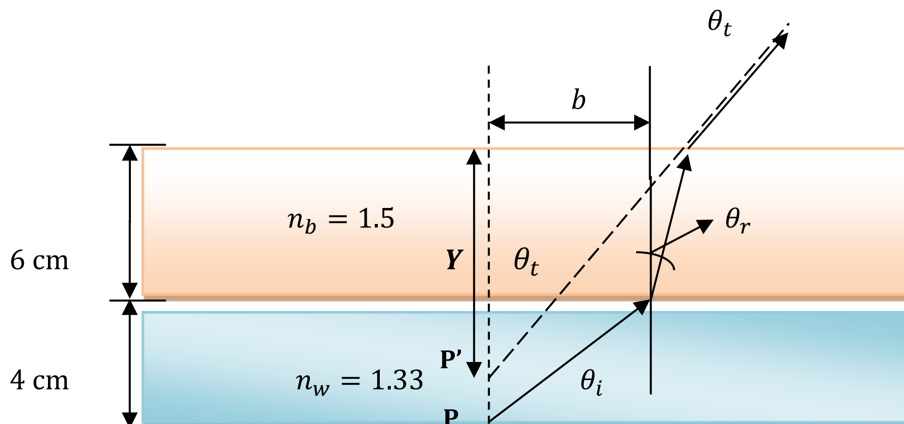


La figura se muestra la construcción de la imagen de un objeto puntual (P), sumergido en agua. Al rayo incidente Pa corresponde el refractado ab, y al incidente Pa el refractado $a'b'$. Ahora bien, al haz incidente Paa' (de color gris) corresponde el haz refractado aa' bb'. Se puede demostrar que si los rayos del haz incidente están poco inclinados respecto a la normal, todos los rayos del haz refractado concurren aproximadamente en un punto P', situado también en la normal y más próximo que el P a la superficie del agua. Si el observador en b recibe los rayos del haz refractado, este observador ve en P' una imagen del punto P. Se dice que P' es una imagen (virtual en este caso) por refracción. En el caso nuestro los rayos están muy poco inclinados con la relación a la normal, y se puede hallar una relación sencilla que enlaza la posición de la imagen (H) y la del objeto (h), para ángulos pequeños:

$$h = H \tan\theta_1 / \tan\theta_2 \cong H n_2/n_1 = 0.75\, H.$$

La profundidad aparente del objeto es aproximadamente 25% menor que su posición original.

4.43 Profundidad Aparente. En un vaso, una película de benceno ($n_b = 1.5$) de 6 cm de espesor flota sobre de agua de 4 cm y $n_w = 1.33$. Determine la distancia del fondo del vaso sobre la superficie del benceno cuando éste es visto verticalmente a través del aire.
R. Considere el diagrama ilustrado en la figura.



En la geometría de la figura, una primera ecuación se plantea en términos de la distancia horizontal b:

$$b = 4\tan\theta_i + 6\tan\theta_r = Y\tan\theta_t.$$

La distancia Y, la cual corresponde a la profundidad aparente del vaso, se puede calcular como:

$$4\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_t} + 6\frac{\tan\theta_r}{\tan\theta_t} = Y.$$

Aplicando sucesivamente la ley de Snell, obtenemos las relaciones entre los ángulos θ_r, θ_t y θ_i:

$$n_b \sin\theta_r = (1)\sin\theta_t,$$

$$n_w \sin\theta_i = n_b \sin\theta_r = \sin\theta_t\,;$$

y utilizando la aproximación de ángulo pequeño con respecto a la normal:

$$\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_t} \approx \frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_t},$$

calculamos la profundidad aparente del vaso:

$$Y = \frac{4}{n_w} + \frac{6}{n_b} = 7 \text{ cm}.$$

Obsérvese que la profundidad total puede calcularse como la suma de la profundidad aparente de cada líquido: d/n.

4.44 Patrón de Fraunhofer. La distancia angular entre el centro y el primer mínimo de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija se denomina semi-ancho angular. Encuentre una expresión para este a) cuando no hay lente de enfoque y la distancia de la rendija a la pantalla es D y b) cuando una lente de distancia focal f está muy cerca de la abertura.

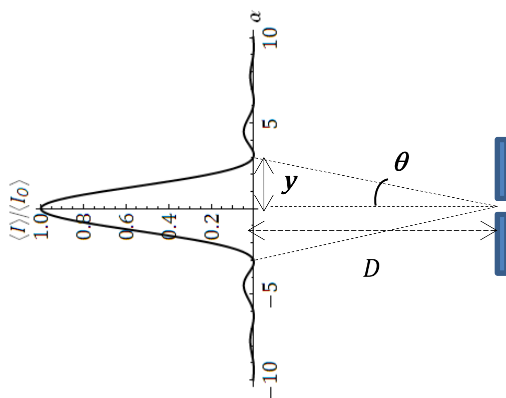
R. a) La expresión para la intensidad de la luz irradiada está dada por la fórmula:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2; \; \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta;$$

En donde a es el ancho de la rendija. El primer mínimo ocurre cuando $\sin\alpha = 0$, y

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{a}.$$

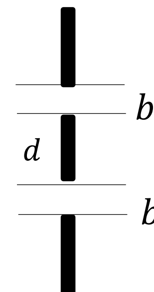
Para ángulos pequeños: $\theta = \pm\lambda/a = y/D, \;\; y = \pm D\lambda/a$.



b) Si inmediatamente detrás de la rendija se deposita una lente, el patrón de difracción se formará en el plano focal imagen, ya que los haces paralelos entre sí convergen en un punto. En lugar de d se debe utilizar la distancia focal de la lente f:

$$y = \pm\frac{f\lambda}{a}.$$

4.45 Experimento de doble rendija. Para $d = 2b$ en la figura, cuántas franjas de interferencia existen en la envolvente central de difracción?.



R. La envolvente central del máximo de difracción está limitada por dos mínimos localizados en posiciones simétricamente opuestas del máximo central. Es necesario entonces conocer el orden del máximo de interferencia que coincide con el primer mínimo de difracción, utilizando:

Máximos de Interferencia: $d\sin\theta_i = m_i\lambda; \quad m_i = 0,1,2,\ldots$
Mínimos de Difracción: $b\sin\theta_d = m_d\lambda; \quad m_d = 1,2,\ldots$

Con $\theta_i = \theta_d$, los máximos de interferencia coinciden con los mínimos de difracción, entonces, para $m_d = 1, m_i = 2$, con $d = 2b$. La envolvente central contiene **tres** franjas de interferencia constructiva: El pico central ($m_i = 0$), y los dos primeros máximos $m_i = \pm 1$.

4.46 Lente-Apertura en un experimento de Difracción. Rayos paralelos de luz verde de Mercurio (Hg), cuya longitud de onda es de 560 nm, pasan a través de una rendija de 0.4 mm de ancho que cubre una lente de 40 cm de distancia focal. Cuál es la distancia entre el máximo central y el primer mínimo sobre una pantalla colocada en el plano focal de la lente?

R. La lente enfrente de la abertura focaliza los rayos incidentes a una distancia igual a la distancia focal de la misma. Los mínimos de difracción ocurren para rayos incidentes paralelos se calculan desde la relación:

$$b\sin\theta = m\lambda, \qquad m = 1,2,3,..$$

Con b como el ancho de la rendija. La distancia al primer mínimo Δy se obtiene desde

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{f}.$$

En primera aproximación, como la distancia focal f es mucho mayor que b, entonces $\tan\theta \approx \sin\theta$. Así: $\Delta y = f\lambda/b$. La distancia entre el máximo central y el primer mínimo corresponde a

$$\boldsymbol{\Delta y = 5.6 \times 10^{-4}}\ \mathbf{m}.$$

4.47 Una red de difracción de 2 cm de ancho tiene 6000 ranuras. A que ángulos ocurrirán los máximos de intensidad de la luz si la radiación incidente tiene una longitud de onda de 589 nm?

R. La separación entre ranuras es: $d = 2/6000\ \text{cm} = 3.3 \times 10^{-4}$ cm. Los ángulos asociados a los máximos de intensidad se obtienen desde la relación:
$d\sin\theta = m\lambda$.

$\boldsymbol{m}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{\theta}$	**10.28°**	**20.91°**	**32.37°**	**45.55°**	**63.18°**

4.48 ***Difracción.*** Dos rendijas separadas por una distancia de 1 mm se iluminan con luz roja de longitud de onda 6.5×10^{-7} m. Las franjas de interferencia se observan sobre una pantalla colocada a 1 m de las rendijas. (a) Hallar la distancia entre dos franjas brillantes. (b) Determinar la distancia entre la tercera franja oscura y la quinta franja brillante, a partir de la franja central.
R. (a) La distancia entre dos franjas brillantes es: $\Delta y = D\lambda/d = 6.5 \times 10^{-4}$ m. La distancia a la quinta franja brillante es: ($m = 5$)

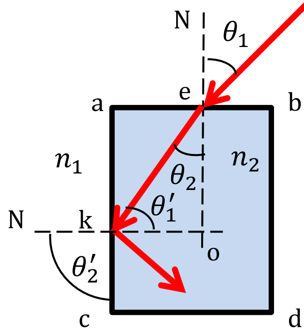
$$\Delta y = 5D\frac{\lambda}{d} = 32.5 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

La distancia a la tercera franja oscura es aproximadamente ($m = 2$):

$$\Delta y' = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{d}D = 16.25 \times 10^{-4}\ \text{m}.$$

La distancia entre estas franjas es: $\mathbf{16.25 \times 10^{-4}}$ **m.**

4.49 *Un rayo luminoso* incide sobre una placa cuadrada de vidrio como en la figura. ¿Cuál debe ser el índice de refracción del vidrio para que ocurra una reflexión total interna en la cara vertical de la placa? El ángulo de incidencia es de 45°.



El rayo que incide sobre la cara ab de la placa de vidrio se refracta. El ángulo de refracción $\theta_2 < \theta_1$ ya que el rayo pasa del medio menos denso al medio más denso ($n_1 < n_2$). Para que el rayo refractado se refleje totalmente en la cara **ac** dentro del vidrio el ángulo θ_1' debe ser igual o mayor que el ángulo crítico, o sea, $\theta_1' > \theta_C$. El ángulo crítico se obtiene haciendo $\theta_2' = 90°$ en la ley de refracción de Snell $n_2 \sin\theta_1' = n_1 \sin\theta_2'$;

$$n_2 \sin\theta_C = n_1 \sin(90°)\,;$$

Para $n_1 = 1$ (índice de refracción del aire)

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

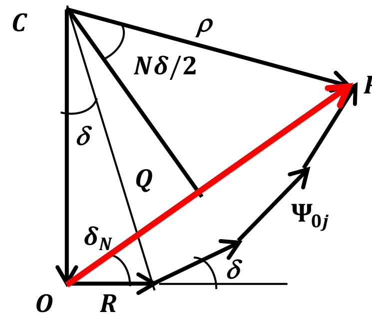
Según la ley de Snell para el rayo que incide sobre la cara ab se cumple: Del triángulo rectángulo **keo** tenemos:

$$\sin\theta_2 = \cos\theta_1' = \cos\theta_C.$$

Sustituyendo en las relaciones anteriores, se obtiene una expresión entre el ángulo crítico y el ángulo de incidencia θ_1.

Un análisis simple demuestra que para índices de refracción mayores que 1.22 el cristal exhibe reflexión total interna.

4.50 *Patrón de interferencia de un sistema de* ***N*** *fuentes sincrónicas idénticas.* Considere un sistema de N fuentes coherentes cuya distancia de separación a es uniforme. Obtener una expresión para la intensidad total producida en un punto suficientemente alejado a esta configuración.



El cálculo para la intensidad total en el punto P puede realizarse utilizando una construcción fasorial indicada en la figura anterior. Cada vector Ψ_{0j} está asociado a una fuente localizada en la posición j-ésima, y la diferencia de fase entre dos vectores rotatorios consecutivos es δ. El valor de δ está definido por:

$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

en donde θ es el ángulo azimutal de cualquier fuente hacia el punto **P**. La construcción geométrica resultante consiste en un polígono regular de N lados, con centro en **C** radio ρ y cuya abertura angular $\measuredangle OCP$ es $N\delta$. El segmento $\overline{OP}$ en el triángulo $\triangle COP$ obedece:

$$\overline{OP} = 2\overline{QP} = 2\rho \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) = \Psi_0,$$

mientras que el segmento $\overline{OR}$ en el triángulo $\triangle COR$ obedece la relación:

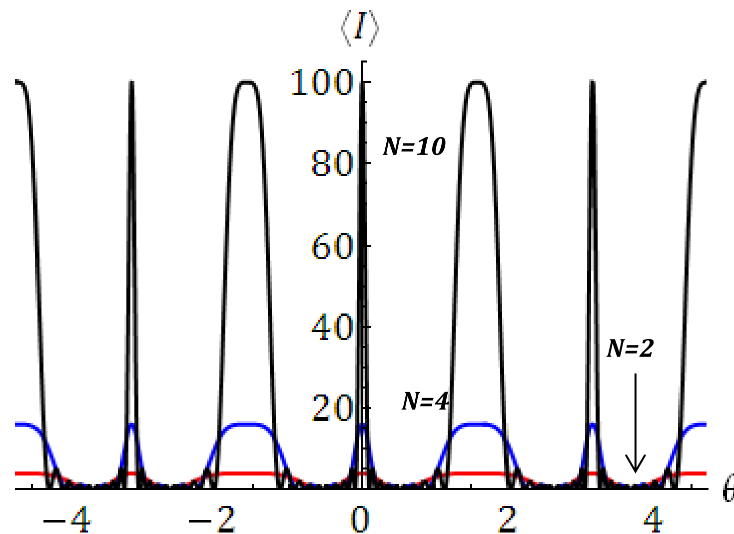
$$\overline{OR} = 2\rho \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \Psi_{01}.$$

Nota: El teorema del coseno puede ser de utilidad en este caso: El segmento $\overline{OR}$ está dado por:

$$\overline{OR} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 - 2\rho^2 \cos\delta} = \sqrt{2}\rho\sqrt{1 - \cos\delta} = 2\rho \sin\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Combinando estas dos últimas expresiones, y teniendo en cuenta que la intensidad resultante es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda resultante Ψ_0, obtenemos:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2$$



4.51 Un material birrefringente responde distintamente dependiendo de la polarización de la luz incidente. Una onda de luz circularmente polarizada puede ser producida introduciendo una diferencia de fase de $\pi/2$ entre dos de sus componentes ortogonales linealmente polarizadas. Un dispositivo que puede fabricarse con estas características se conoce como placa de cuarto de onda. Estas placas están construidas de cristales transparentes doblemente refractivos, como la Calcita o Mica. El índice de refracción difiere para diferentes direcciones de la polarización. Es posible cortar un cristal doblemente refractivo en secciones de tal forma que el eje de un índice máximo n_1 (el eje lento) y un eje asociado al índice menor n_2 (el eje rápido)

formen en un ángulo recto en el plano de la placa. Si la placa tiene un espesor d, entonces el espesor óptico para la luz polarizada en la dirección del eje lento es $n_1 d$ y será $n_2 d$ para la luz polarizada la dirección del eje rápido. Cierto material birrefringente tiene índices de refracción n_1 y n_2 ($n_1 > n_2$) para las dos componentes de la luz linealmente polarizada que se propagan por él. Las correspondientes longitudes de onda sobre cada eje son: $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ y $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$, en donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío. Si un cristal funciona como una placa de ***cuarto de onda***, el número de longitudes de onda asociado a cada componente dentro del material debe diferir en $\lambda_0/4$. a) Hallar el espesor mínimo para una placa de cuarto de onda. b) Encuentre el espesor mínimo de una placa de cuarto de onda construida de Calcita, si los índices de refracción son $n_1 = 1.658$, $n_2 = 1.486$ y la longitud de onda en el vacío es $\lambda_0 = 590$ nm.

R. a) Para una placa de cuarto de onda, d se escoge de tal forma que la diferencia $n_1 d - n_2 d$ sea igual a un cuarto de longitud de onda de la onda incidente en el vacío $\lambda_0/4$. Igualando: $d = \lambda_0/4(n_1 - n_2)$. El mismo resultado puede obtenerse desde el concepto de interferencia constructiva. Si el campo eléctrico está polarizado sobre el eje X, y éste se propaga en dirección +Z (incidencia normal), la condición de interferencia constructiva una vez la onda se ha propagado en el material, para este caso es:

$$\delta_1 = 2\pi \frac{d}{\lambda_1} = 2\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0}.$$

Si ahora el campo está polarizado en la dirección del eje Y, la diferencia de fase para la onda que incide en este estado de polarización es:

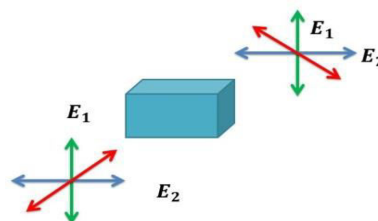
$$\delta_2 = 2\pi \frac{d}{\lambda_2} = 2\pi n_2 \frac{d}{\lambda_0}.$$

En un cuarto de longitud de onda, la diferencia de fase total debe ser $\pi/2$. De esta forma:

$$\delta_1 - \delta_2 = 2\pi(n_1 - n_2)\frac{d}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2}.$$

Resolviendo para $d = \lambda_0/4(n_1 - n_2)$.

Diagrama esquemático de la diferencia de fase de $\pi/2$ (o cambio de polarización) entre la onda incidente y la onda transmitida (línea roja) una vez ésta atraviesa el material birrefringente. b) $d = 857.6$ nm



4.52 Patrón de Fraunhofer III. Una ranura de 0.2 mm de ancho está iluminada por rayos de luz paralelos con $\lambda = 590$ nm. La configuración de difracción se observa en una pantalla situada a 4 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central es de 5×10^{-6} W/m^2 a) Cuál es la distancia desde el centro del máximo central al primer mínimo? b) Cuál es la intensidad en un punto sobre la pantalla situado a la mitad de la distancia calculada en a)?.

R. La intensidad asociada al patrón de Fraunhofer se define como:

$$I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2,$$

Con $u = (\pi\, b\sin\theta)/\lambda$, con b como el ancho del ranura. a) El primer mínimo de difracción se ubica en la posición:

$$b\sin\theta = \lambda.$$

La distancia entre el máximo central y el primer mínimo es: (D es la distancia de la ranura a la pantalla).

$$\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{b} \approx \frac{y}{D}.$$

$y = D\lambda/b = 0.0118$ m (1.18 cm).

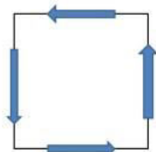
a) En un punto ubicado a la mitad de la distancia calculada, tendremos: $y = 0.0059$ m. Así:

$$\sin\theta = \frac{0.0059}{4} = 1.475\times10^{-3}.$$

El valor de $u = (\pi\, b\sin\theta)/\lambda = \pi/2$. La intensidad en este punto toma el valor:

$$I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = \frac{4I_0}{\pi^2} = \frac{4\times5\times10^{-6}}{\pi^2} = 2.03\times10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$$

Considere el diagrama de fasores asociado un mínimo de interferencia producido por un sistema de N fuentes coherentes:



a) Obtener una expresión para la posición angular del mínimo correspondiente, si la distancia entre fuentes es a y la longitud de onda de la radiación incidente es λ.
b) Utilizar el resultado anterior para calcular la posición de éste mínimo si $\lambda = 2a$.

a) El diagrama de fasores de la figura sugiere que el número de fuentes es 4 ($N = 4$), y que la diferencia de fase entre dos fuentes consecutivas es $\pi/2$. Una expresión para la posición de los mínimos de interferencia asociados a esta configuración se obtiene de la relación

$$\delta = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi\, a\sin\theta}{\lambda}.$$

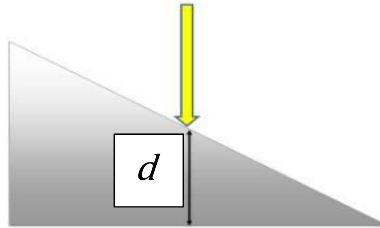
$$\sin\theta = \lambda/4a.$$

b) Si la longitud de onda incidente en el sistema de 4 ranuras es el doble de la separación entre ellas, entonces el primer mínimo de interferencia está localizado en:

$$\sin\theta = \lambda/4a = 1/2.$$

Por lo tanto $\theta = 30^0$.

4.53 *Sobre una cuña* plana muy delgada incide normalmente un tren de ondas luminosas, planas y monocromáticas de longitud de onda λ_0. Si la cuña tiene un índice de refracción igual a $n(> 1)$ y se encuentra rodeada de aire, hallar la posición sobre la cuña de las franjas brillantes de interferencia que se han formado.



R. En la aproximación de incidencia normal, consideramos inicialmente que para una cuña muy delgada, los rayos reflejados y los rayos que emergen de la cuña después de haber penetrado en ella y de reflejarse en su cara inferior son los que producen el fenómeno de interferencia debido a la superposición de los mismos. Si d corresponde al espesor aproximado que tiene el objeto en cualquier punto, la diferencia de fase debido a la diferencia de camino (sobre ese punto) es:

$$\Delta\phi = 2kd = \frac{4\pi n d}{\lambda_0}.$$

La posición de los máximos de interferencia d está dada por (ver tabla **4.24**)

$$d_m = m\frac{\lambda_0}{4n}, \quad m = 1,3,5..$$

La distancia s entre dos máximos consecutivos sobre el plano de la cuña de ángulo α ($\alpha \to 0$) es:

$$s = \frac{(d_{m+1} - d_m)}{\tan\alpha} = \frac{\lambda_0}{2n\tan\alpha} \approx \frac{\lambda_0}{2n\alpha}.$$

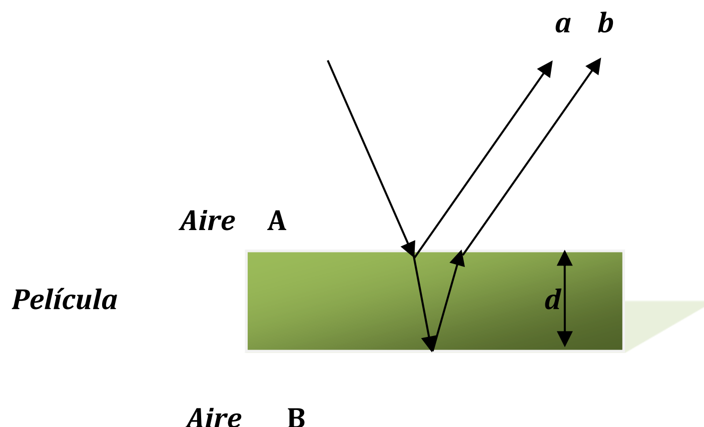
PR 4.2. Luz de 600 nm incide normalmente en una cuña muy delgada con índice de refracción de 1.55. En cuánto cambia es espesor de la cuña sobre una distancia en la cual existen ocho franjas brillantes y siete oscuras?.

R. Utilizamos el resultado del problema anterior. El cambio de espesor en el cual se observa un patrón de franjas brillantes consecutivas es:

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{2n}.$$

En el caso de 8 franjas brillantes, el espesor de la cuña cambiará en $7\Delta y = 1355$ nm.

4.54 Película de jabón. Calcular el mínimo espesor de una película de jabón el cuál reflejará luz negra cuando es iluminada perpendicularmente con luz sodio de 589.3 nm. El índice de refracción de la solución jabonosa es de 1.38.

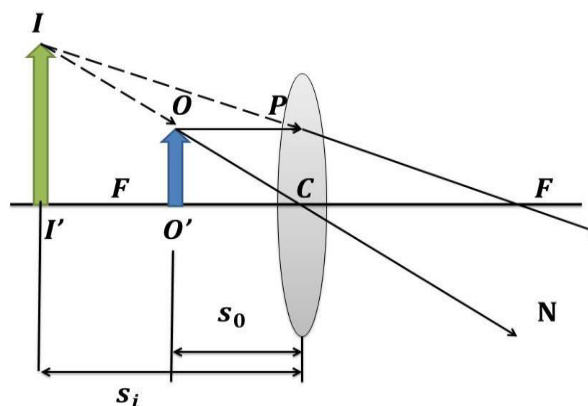


R. La configuración de los rayos incidentes y reflejados de luz Sodio es ilustrada en la figura anterior. El rayo b recorre un camino óptico adicional de longitud $2nd$ comparado con el camino del rayo a. En el caso de una capa jabonosa, la luz viaja a través del aire e incide sobre película de jabón. El aire tiene índice de refracción igual a 1, mientras que la película tiene un índice >1. La reflexión que ocurre en la frontera superior de la película introducirá un cambio de fase de 180° en la onda reflejada debido a que el índice de refracción del aire es menor. La luz que es transmitida en esta interfaz continuará su trayectoria hacia la interfaz inferior en donde puede ser reflejada o transmitida. La reflexión que ocurre en esta frontera no produce un cambio de fase dado que este fenómeno ocurre desde un índice de refracción mayor a uno menor. La condición de interferencia destructiva de la luz reflejada para la película de jabón es:

$$2nd = m\lambda_0, \qquad m = 1,2..$$

y $d = \lambda_0/2n = 213.5$ nm, con $m = 1$, para el cual se obtiene el mínimo espesor.

4.55 Lente Convexo. Un objeto *OO'* se coloca a 5 cm de un lente convexo de distancia focal +7.5 cm. Determine la posición y el aumento de su imagen *II'* (a) por construcción y (b) Por cálculo.



R. (a) Seleccionamos convenientemente los rayos que provienen de ***O***, como se ilustra en la figura. El rayo ***OP***, paralelo al eje óptico, se refracta de tal forma que pasa por el foco ***F***. El rayo ***OCN*** a través del centro óptico es trazado con una línea recta. Estos dos rayos no se encuentran, pero aparecen como si se originaran desde el punto *I*. Luego *II'* representa la posición y el tamaño de la imagen ***OO'***.

Cuando el objeto se encuentra entre F y C, la imagen es virtual, no invertida y aumentada.
(b) Utilizando la ecuación:

$$\frac{1}{s_O}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

obtenemos la posición de la imagen como $s_i=-15$ cm. Dado que la posición de la imagen es negativa, la imagen es virtual (sobre el mismo lado del objeto) y se ubica en frente del lente. El aumento lineal es:

$$\text{Aumento}=\left|\frac{s_i}{s_O}\right|=\frac{15\text{ cm}}{5.0\text{ cm}}=3.0$$

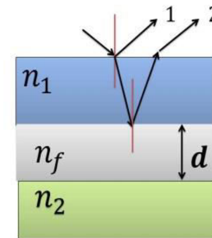
4.56 Posición de los objetos. Calcular las dos posiciones de los objetos que aumentarían su imagen 8.0 veces debido a un lente de distancia focal de +4.0 cm?.
R. Si la magnificación del lente es de 8.0 veces, $s_i=8.0s_O$. La posición del objeto se obtiene desde la ecuación:

$$\frac{1}{s_O}+\frac{1}{8s_O}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{9}{8s_O}=\frac{1}{4},\quad s_O=4.5\text{ cm.}$$

Imagen real e invertida, y $s_i=36$ cm. Con $s_i=-8.0s_O$, $s_O=3.5$ cm, $s_i=-28$ cm. La imagen resultante es virtual y no invertida.

4.57 La figura adjunta muestra una película delgada de un material transparente de espesor (***d***) e índice n_f, en donde $n_1>n_f>n_2$. Calcular los tres espesores más pequeños de la película de tal forma que los rayos (1) y (2) interactúen (a) con interferencia totalmente constructiva y (b) con interferencia totalmente destructiva.



R. La diferencia de fase entre los rayos que interfieren (1) y (2) está definida por la diferencia de camino entre los mismos. Esta diferencia de camino es:

$$\Delta r=2d,$$

mientras que la diferencia de fase es: $k\Delta r=\Delta\phi$. En el caso (a) La interferencia constructiva sucede cuando

$$\Delta\phi=2n\pi,\qquad n=1,2,3\ldots$$

o $d=\lambda/2,\lambda$ y $3\lambda/2$. En el caso (b) $\Delta\phi=(2m+1)\pi,\ m=0,1,2$. Los espesores más pequeños de la película que producen interferencia destructiva en los rayos (1) y (2) son:

$$d=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4}\text{ y }\frac{5\lambda}{4}.$$

En este caso, λ corresponde al valor de la longitud de onda en la película.

4.58 Interferencia debido a una película delgada. Se derrama una gran cantidad de petróleo ($n = 1.40$) en el mar. Suponga que el índice de refracción del agua es 1.33. Cuál es la longitud de onda predominante que se refleja normalmente desde la capa de petróleo hacia la superficie, si ésta tiene un espesor promedio de 430 nm?

R. Como en el caso de la película de jabón, aquí se cumple que $n_{aire} < n_{agua} < n_{petróleo}$, y la fórmula para la interferencia constructiva de la luz reflejada, con incidencia normal es:

$$2n_{petróleo}t = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 1,2, \dots$$

El máximo valor de la longitud de onda reflejada es del orden de 2408 nm.

PR 4.3. Un pescador atando una carnada desea una lupa que produzca una magnificación angular de 2.0 cuando sea usada con los ojos relajados. Cuál debería ser la distancia focal de esta lente?. Qué tan cerca de los ojos del pescador debería estar la carnada?.

R. En un ojo normal, la magnificación angular se define en términos de la distancia objeto (o) desde la lente como:

$$M_\theta = \frac{25\text{ cm}}{o}.$$

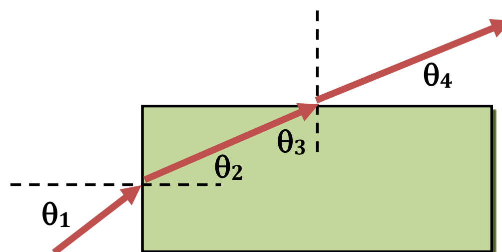
El factor 25 cm corresponde a la distancia estándar de punto cercano en un ojo normal en condición de relajación. Para una magnificación de 2, entonces $o = 12.5$ cm, en cuyo caso se formaría una imagen en el punto estándar cercano, y con una distancia focal

$$M_\theta = \frac{25\text{ cm}}{o} = 25\text{ cm}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{i}\right) = 25\text{ cm}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{-25\text{cm}}\right) = \frac{25\text{ cm}}{f} + 1, \qquad f = 25\text{ cm}.$$

El signo menos en i corresponde al caso en el cual se forma una imagen virtual (amplificada) en el punto cercano del ojo. Cuando el objeto se coloca en el foco de la lente, la imagen se forma en el infinito y

$$M_\theta = \frac{25\text{ cm}}{f_\infty}; \quad f_\infty = o = 12.5\text{ cm}.$$

4.59 Bloque de vidrio. Un rayo de luz entra en la pared plana de un bloque rectangular de vidrio cuyo índice de refracción es n_2. Demostrar que todos los rayos que ingresan experimentan reflexión total interna sólo si $n_2 > 1.414$.



R. En el caso límite el rayo incidente ingresa en forma *rasante* con un ángulo de $\theta_1 \sim 90°$, mientras que la condición de reflexión total interna exige la condición $\theta_4 \sim 90°$. Estas dos condiciones son suficientes para obtener el valor mínimo del índice de refracción del bloque de vidrio. Las ecuaciones para los rayos que ingresan y emergen del cuerpo son:

$$1 = n_2 \sin\theta_2, \quad n_2 \sin\theta_3 = 1.$$

Simple geometría conduce a la relación $\theta_3 = \pi/2 - \theta_2$. Combinando las anteriores expresiones, $\theta_2 = \theta_3 = \pi/4$ ó (45°). Finalmente, el valor mínimo del índice de refracción es $n_2 = \sqrt{2} = 1.414$.

PR 4.4. Al aplicar el *Método de Abbe* para encontrar la distancia focal de una lente, se miden las magnificaciones laterales M_1 y M_2 para dos posiciones diferentes o_1 y o_2. Demostrar que la distancia focal de esta lente es

$$f = \frac{o_2 - o_1}{M_1^{-1} - M_2^{-1}}.$$

R. La magnificación lateral se define como la relación entre la distancia imagen y la distancia objeto:

$$M = -\frac{i}{o}.$$

De la ecuación para los lentes delgados:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{o} - \frac{1}{Mo} = \frac{1}{o}\left(1 - \frac{1}{M}\right).$$

Evidentemente:

$$o_1 = \frac{(M_1 - 1)}{M_1} f; \quad o_2 = \frac{(M_2 - 1)}{M_2} f.$$

La diferencia $o_2 - o_1$ es:

$$o_2 - o_1 = \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right) f.$$

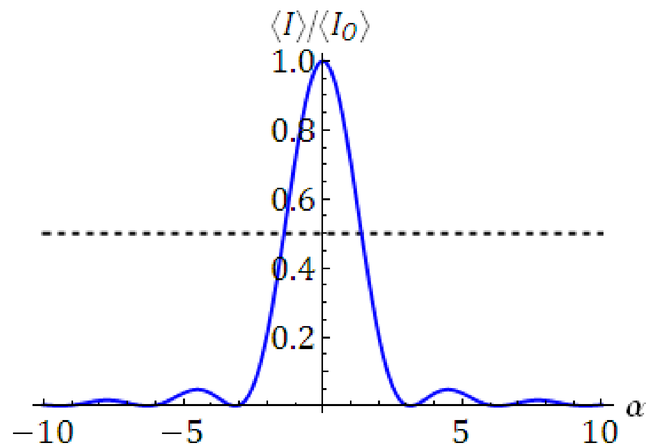
Despejando la distancia focal:

$$f = \frac{o_2 - o_1}{M_1^{-1} - M_2^{-1}}.$$

4.60 *Radiación electromagnética* monocromática con longitud de onda λ proveniente de una fuente distante pasa por una ranura. La configuración de difracción se observa en una pantalla situada a 4.00 m de la ranura. Si el ancho del máximo central es de 8.0 mm, calcular el ancho de la ranura si la longitud de onda es (a) 500 nm (luz visible), (b) 50 μm (radiación infrarroja) (c) 0.5 nm (Rayos X).

R. La posición del primer mínimo de difracción ocurre bajo la condición:

$$\alpha = \pi; \quad \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \pi; \quad \sin\theta = \frac{\lambda}{a} \approx \frac{y}{D}.$$



En donde y es la distancia desde el centro de la pantalla al primer mínimo, y D es la distancia desde la ranura a la pantalla. El ancho del máximo central es:

$$2y \approx \frac{2D\lambda}{a}.$$

Conociendo $2y$ (el ancho del máximo central) es posible obtener el ancho de la ranura a. Para los casos (a) $a = 500$ μm. (b) $a = 50$ mm. (c) $a = 0.5$ μm.

4.61 *Una ranura de 0.3 mm* de ancho es iluminada por rayos paralelos de luz con 600 nm de longitud de onda. La configuración de difracción se observa en una pantalla situada a 1.40 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. Cuál es la distancia en la pantalla desde el centro del máximo central hasta el punto en donde la intensidad ha disminuido en un 50%?

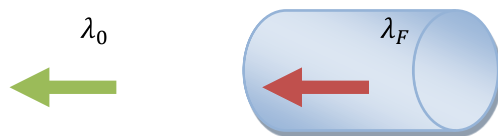
R. Utilizamos la relación general para la intensidad en cualquier punto sobre la pantalla:

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

La ecuación para hallar el ángulo de desviación θ ($\alpha = \pi a \sin\theta/\lambda$), toma la forma: $1/2 = (\sin\alpha/\alpha)^2$. Esta ecuación debe resolverse por métodos numéricos o gráficos. La solución para el factor α se obtiene como la intersección de la curva $(\sin\alpha/\alpha)^2$ con la recta horizontal $I = I_0/2$. Las soluciones para α son $\alpha = \pm 1.39$. La distancia para el cual la intensidad disminuye en un 50% desde el centro de la pantalla es: $y \sim D\sin\theta = D\lambda\alpha/\pi a = 1.24$ mm. La distancia al primer mínimo se obtiene cuando $\alpha = \pi$. En este caso,

$$y \sim \frac{D\lambda\alpha}{\pi a} \sim \frac{D\lambda}{a} = 2.8 \text{ mm}.$$

4.62 ***Fibra óptica****.* Luz que se propaga desde una fibra óptica al aire cambia su longitud de onda desde 452 nm hasta 633 nm. a) Cuál es el índice de refracción de la fibra?. b) Cuál es la velocidad de la luz en la fibra? c) Cuál es la frecuencia de la luz en la fibra? d) Cuál es la frecuencia de la luz en el aire?.



R. a) El índice de refracción se obtiene dividiendo las longitudes de onda correspondientes en cada medio:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_F} = \frac{633 \text{ nm}}{452 \text{ nm}} = 1.40.$$

b) La velocidad de la luz en la fibra es:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8 \text{m/s}}{1.40} = 2.14 \times 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

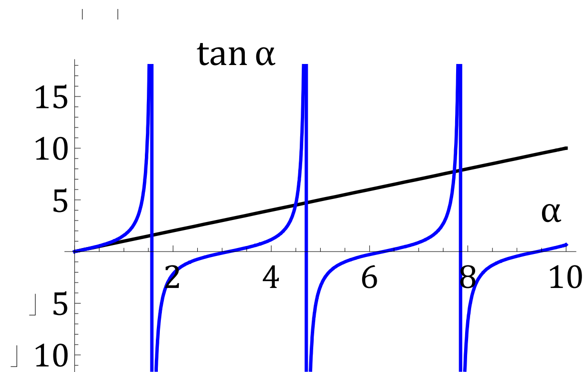
c) y d). Las frecuencias oscilación en la fibra y en el aire no varían. Pueden calcularse utilizando respectivamente:

$$f = \frac{v}{\lambda_F} = \frac{c}{\lambda_0} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

4.63 Máximos de difracción. La intensidad de la luz en la configuración de Fraunhofer de una sola ranura es:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

en donde $\alpha = \pi a \sin\theta/\lambda$. (a) Demostrar que la ecuación para los valores de α en los cuales I es un máximo es: $\tan\alpha = \alpha$. (b) Determine el primer valor positivo de α el cual es solución de esta ecuación.



R. (a) Un máximo se encuentra calculando la primera derivada e igualando a cero:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0;$$

$$2\,(\cos\alpha \sin\alpha)\frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{(\sin\alpha)^2}{\alpha^3} = 0\,.$$

Esta última relación conduce a: $\tan\alpha = \alpha$. b) La solución de esta ecuación trascendental puede obtenerse gráficamente con los valores de la intersección de las dos funciones. Debe prestarse especial atención a los valores adecuados que maximizan la función de intensidad. Un análisis más detallado demuestra que los primeros máximos a ambos lados del máximo central están localizados en: $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.48\pi$ ..., mientras que los valores de las intensidades máximas decrecen rápidamente como: $0.046 I_0, 0.017 I_0$ ...

4.64 Medición de longitudes de onda con un CD. Un haz láser de longitud de onda $\lambda = 632.8$ nm incide normalmente en el lado reflector de un disco compacto. Los surcos del disco están separados entre sí 1.60 micras. Para cuáles ángulos de reflexión (con respecto a la normal) será máxima la intensidad de la luz?.

R. Considerando los surcos del disco como un sistema de doble rejilla, aparecerá un patrón de interferencia constructiva si: $\lambda, 2\lambda, \ldots m\lambda = d\sin\theta, m = 0,1,2$ ...Los primeros (2) ángulos se obtienen resolviendo:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}, \frac{2\lambda}{d} \dots$$

$$\theta = 23.29°, \qquad 52.27°.$$

4.65 La distancia entre el primer y el quinto mínimo de difracción producido por una rendija es de 0.35 mm cuando la pantalla está a 40 cm de la misma y cuando la longitud de onda es de 550 nm. Cuál es el ancho de la rendija?
R. La posición de los mínimos de difracción obedecen la relación: $a\sin\theta = m\lambda$. En la aproximación de ángulo pequeño, $\sin\theta \sim \tan\theta \sim y/d$, en donde y es la posición vertical desde el centro de la pantalla hasta el mínimo de orden m y d es la distancia desde la ranura a la pantalla. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos una expresión para *a:*

$$y_5 - y_1 = \frac{5d\lambda}{a} - \frac{d\lambda}{a} = \frac{4d\lambda}{a}.$$

Despejando *a,* y con $y_5 - y_1 = 0.35$ mm, obtenemos $\boldsymbol{a = 2.5}$ **mm.**

4.66 ***Arreglo de antenas.*** Considere un arreglo de 32 antenas con una separación de 7 m entre ellas. El sistema está sintonizado en una longitud de onda de 21 cm. El sistema de este modo es equivalente a 32 fuentes equidistantes. Hallar el ancho angular del máximo central.

R. En un arreglo de 32 antenas, el primer mínimo de intensidad se localiza en puntos en donde:

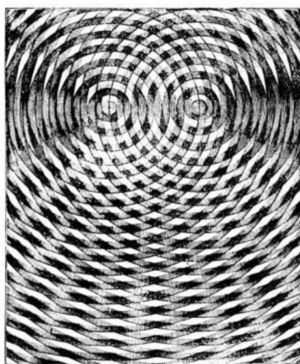
$$\frac{N\delta}{2} = \pm\pi.$$

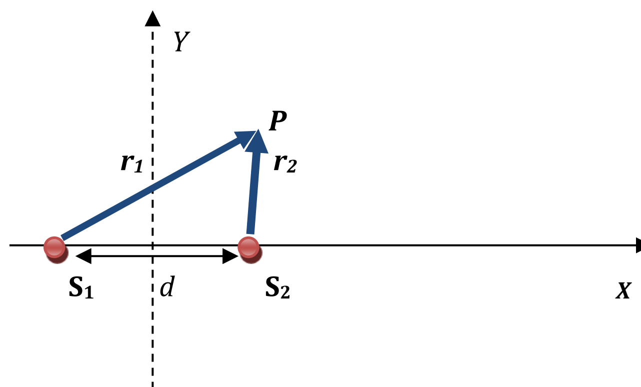
La diferencia de fase es:

$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta = \pm\frac{2\pi}{N}. \qquad \sin\theta = \pm\frac{\lambda}{Na} = \frac{0.21}{32\times 7} = \pm 9.375\times 10^{-4}.$$

El ángulo de localización del primer mínimo es 0.0537°, mientras que el ancho angular está dado por: $\Delta\theta = 0.107°$.

4.67 ***Patrón de Líneas Nodales en dos Fuentes Coherentes.*** Dos fuentes puntuales coherentes de ondas S_1 y S_2 están separadas una distancia d a lo largo del eje X. Demuestre que las líneas modales son hipérbolas.





http://en.wikipedia.org/wiki/File:PSM_V36_D057_Hyperbolas_produced_by_interference_of_waves.jpg#file

R. Las líneas nodales están definidas por la condición $|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| =$ constante. En un punto $\boldsymbol{P}$ sobre la línea nodal con coordenadas (x, y) los vectores $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ tienen componentes $(x + d/2, y)$ y $(x - d/2, y)$ respectivamente, asumiendo que el eje Y es una bisectriz de la línea que une las dos fuentes. La diferencia de camino entre las dos señales emitidas desde las fuentes está dada por:

$$\Delta r = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = c = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

en donde c es una constante que depende del orden del mínimo de interferencia. Manipulando algebraicamente la expresión anterior, obtenemos:

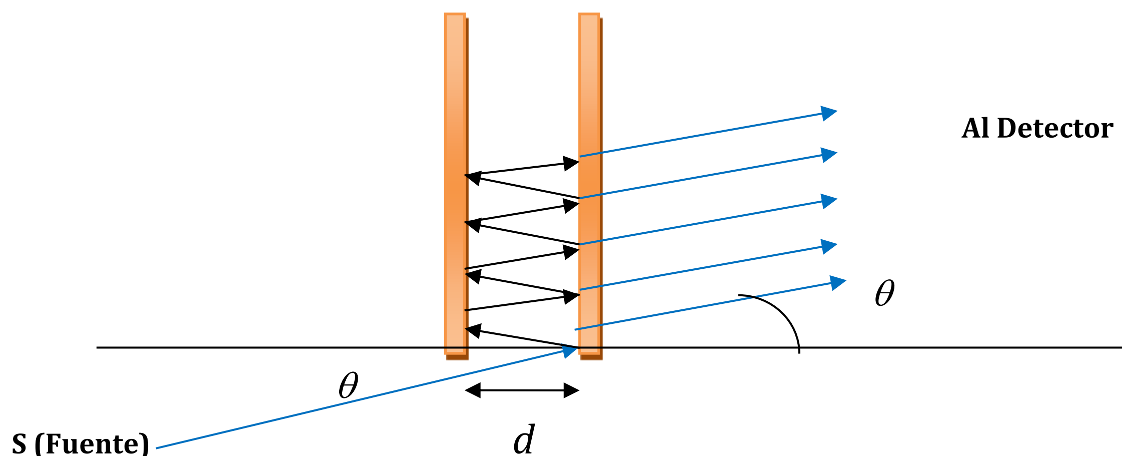
$$\frac{4x^2}{c^2} - \frac{4y^2}{(d^2 - c^2)} = 1,$$

el cual corresponde al lugar geométrico de una hipérbola con vértices en $\pm c/2$, cuya excentricidad se define como: $\varepsilon = d/c$, y la distancia a uno de los focos F_2 y F_1, desde el centro de la hipérbola es $\pm\varepsilon c = \pm d$.

***4.68 El interferómetro de Fabry-Perot**.* Demuestre que la condición de interferencia constructiva en el interferómetro de Fabry-Perot para las ondas que llegan al detector es

$$\frac{2d}{\cos\theta} = m\lambda,$$

en donde m es entero y d es la distancia entre los espejos paralelos.



R. La diferencia de fase entre dos rayos consecutivos que emergen del interferómetro es

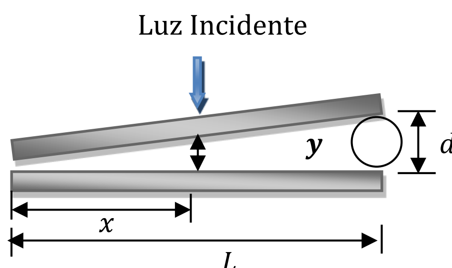
$$\Delta\phi = k\Delta r,$$

en donde Δr es la diferencia de camino entre dos haces salientes. Simple geometría conduce a

$$\Delta r = \frac{2d}{\cos\theta}.$$

Interferencia constructiva sucede cuando $\Delta\phi = 2m\pi$, ó $2d/\cos\theta = m\lambda$, el cual completa la demostración. El ajuste para la medición de la longitud de onda del haz puede lograrse cambiando el ángulo de incidencia con respecto a la normal o a través de la variación de la distancia entre las superficies reflectoras. Uno de los inconvenientes de este dispositivo radica en la pérdida de la energía electromagnética por absorción en las superficies especulares, las cuales pueden inducir un cambio de fase adicional debido al índice de refracción del espejo y a la penetración de la onda en el trasfondo metálico. Por otro lado, debido a las múltiples reflexiones presentes en el dispositivo, éste es útil en telecomunicaciones y en aplicaciones de espectrometría de efecto Zeeman, en donde las líneas espectrales son tan cercanas para ser distinguidas en un espectrómetro normal.

4.69 Una placa de vidrio plana descansa sobre una placa de vidrio similar (horizontal). Las placas están en contacto por un borde y separadas una distancia d por el otro mediante un alambre fino, con $d << L$, de modo que entre las dos placas existe una cuña de aire. La luz monocromática que incide desde arriba es casi normal a las superficies de ambas placas. Obtener las expresiones para las posiciones x de (a) las franjas oscuras y (b) las franjas brillantes de la luz reflejada. c) Cuál es la separación entre franjas oscuras consecutivas en el caso $d = 31$ micras, $L = 0.27$ m, $\lambda = 724$ nm?



R. Este ejemplo representa claramente el caso de un sistema con índice de refracción menor (aire) en medio de dos sistemas con índices de refracción mayores (vidrio). En este caso debemos adaptar el resultado de la tabla 4.24, en donde la diferencia de fase es cero para un haz reflejado desde la placa de vidrio inclinada, y la diferencia de fase es igual a **π** para un haz reflejado desde la placa plana. La diferencia de fase total es **π**, y La posición de las franjas oscuras está dada por:

(a) $2y = (m - 1/2)\lambda$, en donde y es la distancia vertical entre las placas de vidrio en un punto a x metros desde el borde izquierdo, y el índice de refracción del aire se toma igual a la unidad. La relación entre la distancia horizontal y vertical es: $y = xd/L$, mientras que las posiciones de las franjas oscuras están dadas según

$$x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{2d} = \frac{\lambda L}{4d}, \frac{3\lambda L}{4d}, \frac{5\lambda L}{4d} \dots$$

(b) Para el caso de las franjas brillantes, $2y = m\lambda$, y la posición de las mismas sobre la superficie horizontal es:

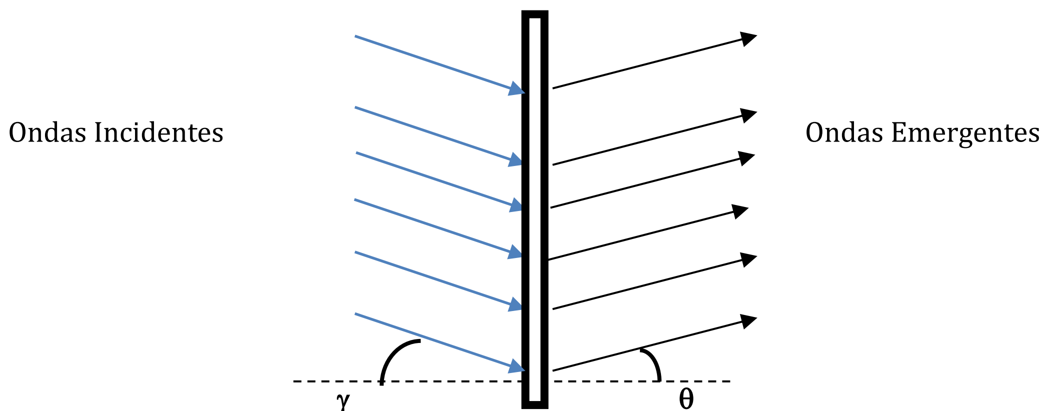
$$x = m\frac{\lambda L}{2d} = \frac{\lambda L}{2d}, \frac{\lambda L}{d}, \frac{3\lambda L}{2d} \dots$$

(c) La separación entre franjas oscuras (o brillantes) consecutivas es $\Delta x = 3\lambda L/4d - \lambda L/4d = \lambda L/2d = 3.15$ mm.

4.70 Considere que un haz de luz incide en una red de difracción y forma un ángulo γ con respecto a la normal, como se ilustra en la figura. Demostrar que los máximos de interferencia satisfacen la ecuación

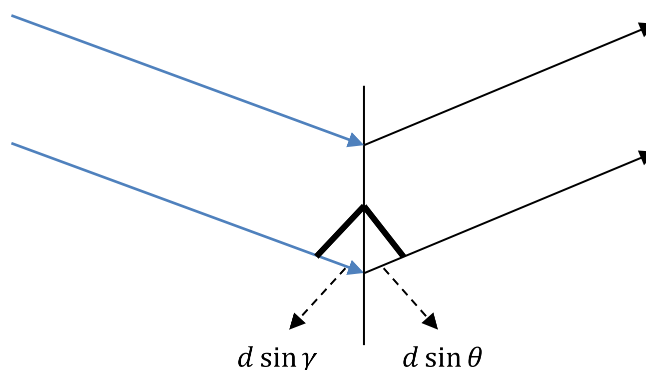
$$d(\sin\gamma + \sin\theta) = \pm m\lambda, \quad (m = 0,1,2,\dots),$$

en donde d es la distancia entre las ranuras.



R. La diferencia de camino entre dos rayos adyacentes está dado por:

$$\Delta r = d(\sin\gamma + \sin\theta);$$



mientras que la diferencia de fase entre estos dos rayos es:

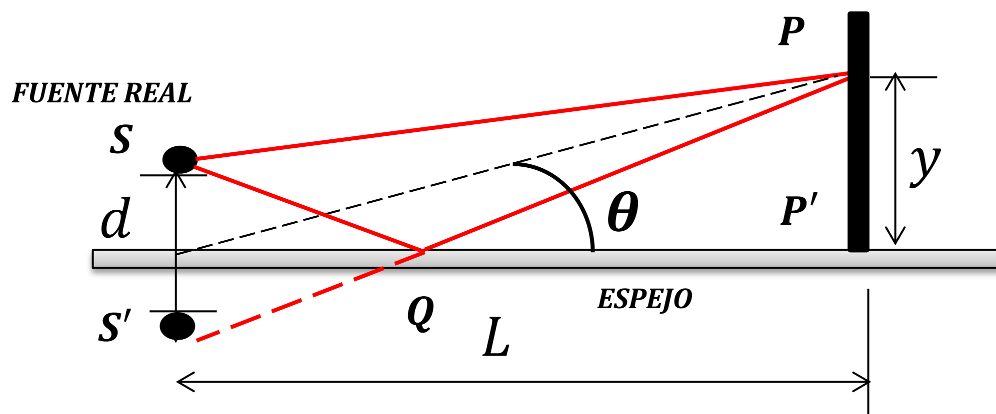
$$\Delta\phi = k\Delta r = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d(\sin\gamma + \sin\theta).$$

La condición de interferencia constructiva $\Delta\phi = \pm 2m\pi$, con m entero, conduce a la relación

$$d(\sin\gamma + \sin\theta) = \pm m\lambda, \quad (m = 0,1,2,\dots).$$

4.71 ***Espejo de Lloyd.*** Con el espejo de Lloyd que se ilustra en la figura, es posible producir un diagrama similar al de doble rendija. Para ángulos rasantes, casi el 100% de la luz que incide sobre el vidrio se refleja, de modo que el haz reflejado tiene casi la misma amplitud en

un punto ***P*** de la pantalla que el haz que va de manera directa desde la rendija ***S*** hasta ***P***. La rendija y su imagen virtual se comportan como fuentes coherentes. Desarrollar expresiones similares para obtener las franjas oscuras y brillantes que aparecen en la pantalla.



R. La distancia $\overline{SP}$ la denotamos como r_1 y la distancia $\overline{SQ}+\overline{QP}$ como r_2.

$$r_1=\sqrt{\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+L^2}\ \text{ y }\ r_2=\sqrt{\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+L^2}\,.$$

Si utilizamos la aproximación de pantalla lejana, la diferencia de fase asociada a la diferencia de recorrido óptico de los dos rayos es:

$$\Delta\phi=k\Delta r=\frac{2\pi^L}{\lambda}(r_2-r_1)=\frac{2\pi yd}{\lambda L}.$$

El espacio entre franjas es de nuevo $\lambda L/d$. La diferencia de este dispositivo con respecto al de doble rendija está en la incidencia rasante (el ángulo de incidencia con respecto a la normal es de 90°), el haz reflejado sufre un cambio de fase de 180°, y con un cambio adicional de fase de $\pm\pi$, tendremos:

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\pm\pi$$

y la intensidad de la onda resultante:

$$I=4I_0\sin^2\left(\frac{\pi yd}{\lambda L}\right).$$

El patrón de franjas para el espejo de Lloyd es complementario al del interferómetro de Young; el máximo de un patrón existe para valores de y que corresponden a los mínimos en el otro patrón. En el centro de la pantalla habrá una franja oscura y la mitad inferior del espejo limitará el patrón de interferencia mismo. Este dispositivo simple permite incluir dentro del análisis los cambios asociados en la distribución de los máximos o mínimos de intensidad debido a superficies reflectoras en un amplio rango del espectro electromagnético, como rayos X, pantallas de alambre para microondas señales satelitales en cercanías de un lago tranquilo.

4.72 Poder de Resolución. El poder de resolución de un dispositivo óptico, cuyo fin es dispersar la luz en función de la longitud de onda, se define como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

en donde $\Delta\lambda$ es la diferencia entre la longitud de onda de dos líneas espectrales que apenas pueden resolverse y λ es la longitud de cualquiera de ellas. Demuestre que el poder de resolución de una red para el m-ésimo orden espectral es Nm.

R. En este caso utilizamos el criterio de ***Rayleigh***: "El criterio para la resolución de dos franjas de igual densidad de flujo requiere que el máximo principal de una coincida con el primer mínimo de la otra". La condición de mínimo de una red de N surcos es:

$$\frac{N\delta}{2} = m\pi, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

El ancho efectivo de una línea espectral emergente se define como la distancia angular entre los ceros a cada lado del máximo principal, es decir:

$$\Delta\delta = \frac{4\pi}{N} = \frac{2\pi\, a\cos\theta}{\lambda}\Delta\theta; \qquad \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Na\cos\theta}.$$

Este valor corresponde al ancho angular de la línea, aun cuando la luz incidente sea monocromática. Este ancho varía inversamente con el ancho de la red Na. Según el criterio de Rayleigh, el límite de resolución de la separación angular es la mitad del ancho la línea:

$$(\Delta\theta)_{min} = \frac{\lambda}{Na\cos\theta_m}.$$

De la condición de orden para máximos principales, éstos ocurren cuando

$$\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = N,$$

o en forma equivalente: $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$el cual corresponde a la *ecuación de la red* para incidencia normal: $a\sin\theta_m = m\lambda$. Los valores de m especifican el orden de los varios máximos principales. Calculando el ancho mínimo de la línea resuelta en términos del orden del máximo y del cambio de la longitud de onda, obtenemos:

$$(\Delta\theta)_{min} = \frac{m(\Delta\lambda)_{min}}{a\cos\theta_m}.$$

Combinando las expresiones anteriores, obtenemos el poder de resolución del dispositivo:

$$R = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{min}} = mN.$$

Si el ángulo de incidencia es θ_i, el poder de resolución toma la forma:

$$R = \frac{Na(\sin\theta_m - \sin\theta_i)}{\lambda},$$

Y cuyo valor máximo es $2Na/\lambda$, el cual ocurre en condición de autocolimación, ó $\theta_i = -\theta_m = 90°$.

4.73 Dispersión de una red I. a) Demuestre que la dispersión de una red puede escribirse como:

$$D = \frac{m}{\sqrt{a^2 - (m\lambda)^2}}.$$

b) Hallar la dispersión en el caso en que $m = 1$, $a = 2.11$ μm y $\lambda = 550$ nm.

R. a) La dispersión de una red se define como la diferencia de la posición angular de correspondiente a la diferencia en la longitud de onda:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}.$$

La ecuación de la red es: $a\sin\theta_m = m\lambda$, y la dispersión se obtiene derivando la expresión anterior:

$$D = \frac{m}{a\cos\theta_m} = \frac{m}{a\sqrt{1 - (\sin\theta_m)^2}} = \frac{m}{\sqrt{a^2 - (m\lambda)^2}}.$$

La separación angular entre dos líneas de diferente frecuencia aumenta cuando el orden aumenta. b) $D = 4.91 \times 10^{-4}\ \text{nm}^{-1}$.

4.74 Dispersión de una red II. Demuestre que la expresión para la dispersión de una red se puede escribir como:

$$D = \frac{\tan\theta_m}{\lambda}.$$

R. Desde la definición $D = d\theta/d\lambda$, y la ecuación de la red $a\sin\theta_m = m\lambda$, tenemos:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a\cos\theta_m} = \frac{(a\sin\theta_m)/\lambda}{a\cos\theta_m} = \frac{\tan\theta_m}{\lambda}.$$

4.75 Un haz de luz de una fuente cuya emisión contienen dos líneas con longitudes de onda de 462.74 nm y 463.35 nm incide de manera normal en una red, y el haz ilumina 1000 rendijas. De acuerdo con el criterio de Rayleigh, están los máximos de interferencia de primer orden correspondientes resueltos?.

R. Según el criterio de Rayleigh, las líneas están resueltas si

$$\Delta\lambda > \frac{\lambda}{Nm}.$$

Para los máximos de primer orden, $m = 1$, $N = 1000$, $\Delta\lambda = 0.61$ nm $> \lambda/Nm = 0.463$ nm. Las líneas **si** están resueltas.

4.76 Descarga de un gas de Hidrógeno. Un máximo de primer orden para la línea H_α (λ_α= 653.3 nm) de un tubo de descarga de hidrógeno está a $\theta = 18.3°$ para una determinada red de

difracción. a) Cuál es el espacio entre las rendijas de la red? b) Una línea discreta de otra fuente tiene un máximo de primer orden a θ =15.7°. Cuál es la longitud de onda de esta emisión?.

R. a) Utilizamos la ecuación de red. Con $m = 1$, el espacio de red es $a = \lambda/\sin\theta_1 = 2080.6$ nm.
b) $\lambda = a\sin\theta_1 = 2080.6\sin 15.7° = 563.01$ nm.

4.77 Doble rendija. Determine la relación entre la separación de rendijas y su anchura d/a, en la distribución de intensidad por una doble rendija.

R. El espectro de intensidad de un sistema de doble rendija debe corregirse de la forma:

$$I = 4I_c\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \ \beta = \pi\, a\sin\theta/\lambda\,, \phi = 2\pi\, d\sin\theta/\lambda.$$

En donde I_c es la intensidad en el centro del diagrama correspondiente a una sola rendija. El ancho del máximo de difracción principal sobre la pantalla es:

$$\Delta Y = \frac{2D\lambda}{a},$$

mientras que la distancia entre dos mínimos consecutivos de interferencia sobre la pantalla se obtiene desde la aproximación:

$$\Delta y = \frac{D\lambda}{d},$$

en donde D es la distancia del dispositivo a la pantalla. El número de franjas oscuras # o mínimos de interferencia que están contenidos en el ancho de difracción principal se obtiene comparando:

$$\#\Delta y = \Delta Y,$$

mientras que la relación entre d y a es:

$$\frac{\#}{d} = \frac{2}{a}; \qquad \boldsymbol{\frac{d}{a} = \frac{\#}{2}}.$$

4.78 Experimento de Young. Considere la primera franja brillante en el lado positivo Y del máximo central en el patrón de interferencia de un experimento de doble rendija de Young. Tomar $d = 0.16$ mm, $\lambda = 550$ nm y L (distancia a la pantalla) 1.24 m. Encuentre la coordenada Y de forma tal que la intensidad resultante sobre la pantalla sea igual al 75% de su valor máximo.

R. La intensidad de la luz en el patrón de interferencia en un experimento de Young está dada por: $\langle I_T\rangle = I_0\cos^2(\delta/2)$. En el caso en que sobre la pantalla la intensidad sea de $0.75I_0$, entonces la diferencia de fase de los dos rayos incidentes es:

$$0.75 = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right); \quad \delta = \frac{\pi}{3}.$$

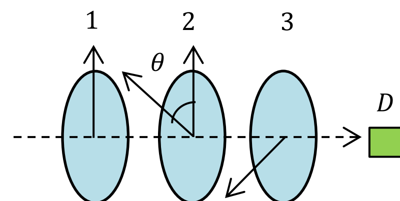
El ángulo desde las rendijas hasta la pantalla sobre la horizontal obtiene como:

$$kd\sin\theta = \delta = \frac{\pi}{3}; \qquad \sin\theta = \frac{\lambda}{6d} \approx \tan\theta = \frac{Y}{L}.$$

La posición vertical desde el centro de la pantalla a un punto en donde la intensidad corresponde al 75% de la intensidad máxima es:

$$Y \approx \frac{\lambda L}{6d} \approx 0.71 \text{ mm}.$$

4.79 Luz polarizada. Suponga que el ángulo entre los ejes de transmisión de los polarizadores 1 y 3 de la figura se mantiene fijo a 90° mientras que el ángulo θ entre los ejes 1 y 2 puede variar. Calcular la intensidad en el detector D asumiendo que la intensidad del haz no polarizado que inciden en el dispositivo 1 es I_0.



R. Cuando el haz no polarizado atraviesa el primer filtro, la intensidad cambia a $I_0/2$. Al superar el segundo filtro, la intensidad cambia, según la ley de Malus, a:

$$I^{(2)} = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta)$$

Cuando la luz sobrepasa el filtro 3, la intensidad de salida, que es la misma que alcanza el detector, es:

$$I^{(3)} = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta)\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{I_0}{16}(1 - \cos(4\theta)).$$

La máxima intensidad detectada es $I_0/16$ y el ángulo del segundo detector para el cual esto sucede es $\pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8$ ... (22.5°,67.5°,112.5°,157.5°...).

4.80 *Una onda plana de luz monocromática* en el aire llega en incidencia normal a una película delgada de aceite que cubre una placa de cristal. La longitud de onda de la fuente se puede variar continuamente Se observa una interferencia destructiva en el haz reflejado para longitudes de onda de 5000 Angstroms y 7000 Angstroms, pero no se observa para ninguna otra longitud de onda intermedia. Si el índice de refracción del aceite es de 1.3 y el del vidrio es de 1.5. (a) Hallar el espesor de la película de aceite, (b) Qué sucede si el índice de refracción del vidrio varía de 1.5 a 1.7.

R. Con incidencia normal, $i = 0, n_1 = 1, n_2 = 1.3,\ n_3 = 1.5$. Como $n_1 < n_2 < n_3$, la diferencia de fase del haz de luz es $\delta = 2dn_2$. Interferencia destructiva ocurre bajo la condición (tabla 4.2):

$$2dn_2 = \left(m_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_1,$$

para la primera longitud de onda, y

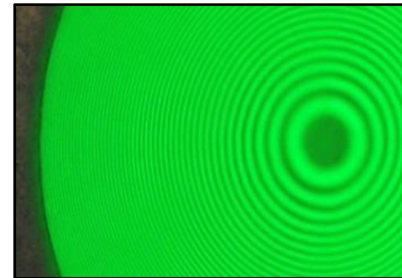
$$2dn_2 = \left(m_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda_2,$$

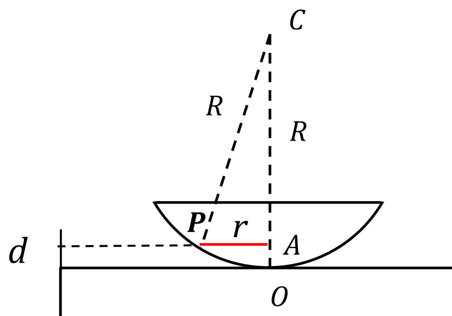
para la segunda longitud de onda. Como entre λ_1 y λ_2 no se observa ningún otro fenómeno de interferencia destructiva, podemos concluir que estos mínimos son de órdenes consecutivos, y por lo tanto: $m_2 = m_1 + 1$. Igualando las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\left(m_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda_2 = \left(m_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_1,$$

$$m_2\lambda_2 - m_1\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), \qquad d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2n_2|\lambda_2 - \lambda_1|} = 6730\ \dot{A}.$$

4.81 Anillos de Newton. En la figura se muestra una lente convergente y otra plana entre cuyas superficies en contacto se forma una delgada cuña de aire. Cuando se ilumina normalmente, con luz de longitud de onda λ_0, se observa un patrón de interferencia en forma de anillos concéntricos con centro en el punto de contacto. Hallar el radio de los anillos brillantes.http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic186204.files/images/NewtonsRings21-crop-rotated-400x267.jpg





R. La capa de aire entre las dos cuñas posee un índice de refracción menor que la del material que las compone. La distancia d puede calcularse como: $d = R - \sqrt{R^2 - r^2}$. La reflexión desde el hemisferio produce un cambio de fase $\delta\phi = 0$. Reflexión desde el plano produce un cambio de fase $\delta\phi = \pi$. La diferencia de fase entre los rayos reflejados desde el plano y el hemisferio es:

$$\delta = k(2d) - \pi = \frac{4\pi d}{\lambda_0} - \pi.$$

Para $d << r, d \approx r^2/2R$. Interferencia constructiva ocurre cuando: $\delta = 2m\pi,\ m = 0,1,2..$ Igualando las expresiones anteriores:

$$\frac{d}{\lambda_0} = \frac{2m+1}{4},$$

mientras que los radios de los anillos brillantes están dados por la expresión:

$$r_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)R\lambda_0}, \qquad m = 0,1,2,..$$

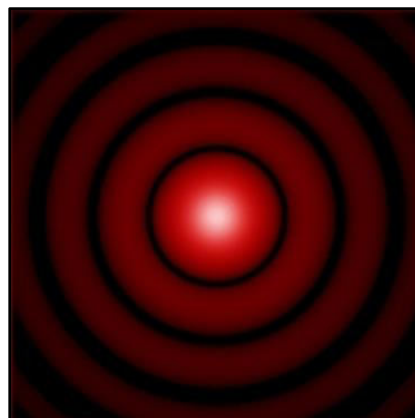
En el centro del sistema aparecerá un anillo oscuro, dado que la diferencia de recorrido óptico es $\lambda_0/2$.

4.82 Disco de Airy. Calcular el diámetro del disco central de Airy formado en una pantalla ubicada a 1 m de una abertura circular de 0.1 mm de diámetro la cual es atravesada por un haz de luz de 550 nm.

R. El patrón de difracción de Airy se forma cuando la luz incidente atraviesa una abertura circular de radio comparable con la longitud de onda λ. La expresión para el ángulo medido con respecto a un eje perpendicular que pasa por la abertura es:

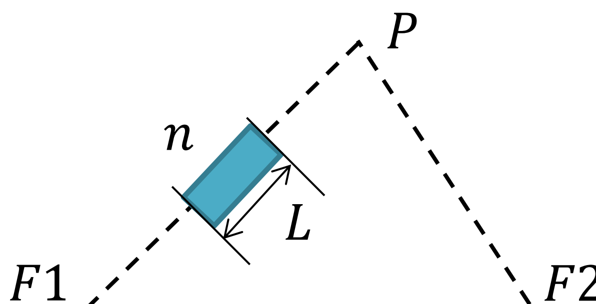
$$\sin\theta = \frac{1.22\lambda}{D},$$

En donde D es el diámetro de la abertura. En la aproximación de pantalla lejana, $\sin\theta \approx R/L$, con R como el radio del disco brillante central (o radio del primer anillo oscuro) y L como la distancia a la pantalla. Numéricamente: http://en.wikipedia.org/wiki/airy_disk



$$R = \frac{1.22\lambda}{D} L = 0.671 \text{ cm}$$

4.83 Las intensidades medias producidas en forma independiente por las fuentes coherentes F_1 y F_2 en el punto P son 36 W/m^2 y 9 W/m^2 respectivamente. Las distancias $\overline{F_1P}$ y $\overline{F_2P}$ son iguales. Determine la intensidad en P cuando estas fuentes actúan simultáneamente cuando una lámina de material dieléctrico con índice de refracción 1.5 y 2000 nm de longitud está presente. Considere que la longitud de onda de las fuentes es 400 nm.



R. Denotamos como I_1 e I_2 a las intensidades de las fuentes coherentes. La intensidad resultante en P obedece la relación:

$$I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi\Delta r}{\lambda}\right).$$

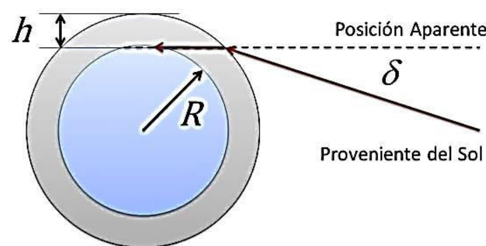
En el caso en el que la lámina dieléctrica está ausente, la diferencia de camino recorrido por la luz que proviene de las dos fuentes es cero, y la intensidad resultante es 81 W/m^2. Cuando se inserta la lámina dieléctrica, la diferencia del camino óptico recorrido es $(n-1)L$. Reemplazando los datos, tendremos que la intensidad resultante en P es 9 W/m^2. *Nota*: La velocidad de la onda en la placa dieléctrica es c/n, y la diferencia de fase es $2\pi(n-1)L/\lambda$.

Addendum: La velocidad de propagación de la onda en un medio dieléctrico homogéneo es c/n. La diferencia temporal entre dos ondas que se propagan la misma distancia L, una en el vacío y otra en el dieléctrico es:

$$\Delta t = \frac{L(n-1)}{c}.$$

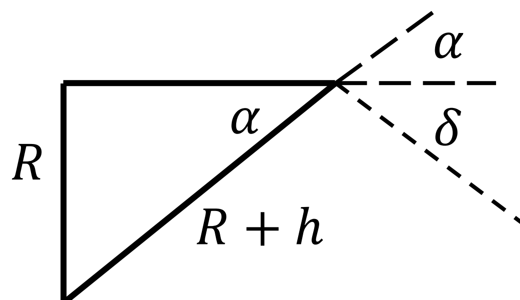
Esto puede también interpretarse como si la onda que se propaga en el dieléctrico recorriese una distancia nL con una velocidad igual a la velocidad de la luz en el vacío. La diferencia de fase asociada a la diferencia de recorrido es $\Delta\phi = kL(n-1)$, con k como el vector de onda en el vacío.

4.84 Posición aparente del Sol. Cuando el sol parece estar justo en el horizonte (al ponerse o cuando sale), el astro de hecho está *por debajo* del horizonte. La explicación de esta supuesta paradoja es que la luz proveniente del sol se desvía ligeramente cuando entra en la atmósfera de la tierra, como se ilustra en la figura. Puesto que nuestra percepción está basada en la idea de que la luz se desplaza en líneas rectas, percibimos la luz como proveniente de una posición que se encuentra por encima de la posición real del sol en un ángulo δ.



Suponiendo que la atmósfera tiene densidad uniforme y en consecuencia, un índice de refracción uniforme n, y se extiende hasta una altura h por encima de la superficie terrestre, en cuyo punto termina de manera abrupta. (a) Hallar una relación para el ángulo δ en términos del radio de curvatura de la Tierra R, y la altura h. (b) Estimar δ para $n = 1.0003$, $h = 20$ km y el radio de la Tierra $R = 6{,}380$ km.

R. (a) En la aproximación *del índice de refracción homogéneo*, es posible resolver este problema utilizando la forma común de la ley de Snell. Con respecto a la normal,



$$n \sin\alpha = \sin(\alpha + \delta).$$

Explícitamente: $\delta = \sin^{-1}(n \sin\alpha) - \alpha$.

Según la relación trigonométrica: $\sin\alpha = R/(R+h)$. El ángulo de incidencia del haz de luz proveniente desde el astro es:

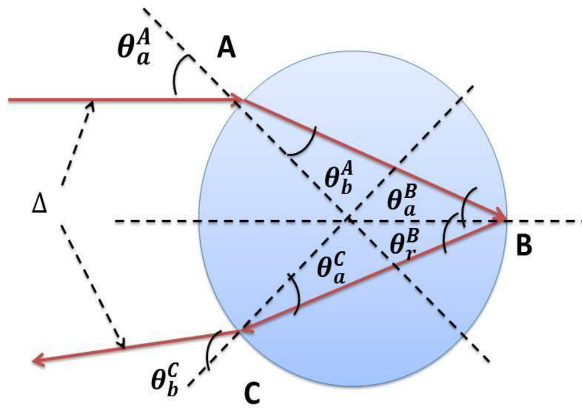
$$\delta = \sin^{-1}\left(\frac{nR}{R+h}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

(b) Numéricamente: $\delta = 0.222°$.

4.85 Un arco iris se produce por la reflexión de la luz solar por las gotas esféricas de agua en el aire. En la figura se muestra un rayo que se refracta en una gota en el punto A, se refleja en la superficie posterior de la gota en el punto B, y se refracta de nuevo hacia el aire en C. Los ángulos de incidencia y reflexión θ_a y θ_r se muestran en el punto B, y los ángulos de incidencia y refracción θ_a y θ_b se muestran en los puntos A y C. Demostrar que el ángulo en radianes entre el rayo antes de penetrar en la gota en A y después de salir de ella en C (la desviación total del rayo) es



$\Delta = 2\theta_a^A - 4\theta_b^A + \pi$. Utilice la ley de Snell para escribir Δ en términos del índice de refracción del agua de la gota n y θ_a^A. Un arco iris se formará cuando la desviación angular Δ sea estacionaria con el ángulo de incidencia θ_a^A, esto es $d\Delta/d\theta_a^A = 0$. Si se satisface esta relación, todos los rayos con ángulos de incidencia cercanos a θ_a^A regresarán al aire en la misma dirección, produciendo una zona brillante en el cielo. Sea θ_1 el valor de θ_a^A para el cual sucede lo anterior. Demostrar que $\cos^2\theta_1 = (n^2-1)/3$. El índice de refracción para la luz violeta en agua es 1.342 y para la luz roja es de 1.330. Utilizar los resultados anteriores para hallar θ_1 y Δ para las luces violeta y roja. Cuál es el color más alto en el horizonte al observar un arco iris?.



R. La desviación angular en A es $\theta_a^A - \theta_b^A$, en B es $\pi - \theta_a^B - \theta_r^B$ y en C corresponde a: $\theta_b^C - \theta_a^C$. Relaciones geométricas simples conducen a: $\theta_a^B = \theta_r^B$; $\theta_a^C = \theta_b^A$; $\theta_a^C = \theta_b^A$ y por ley de Snell es fácil deducir $\theta_b^C = \theta_a^A$. La suma de la desviación total del rayo conduce a:

$$\Delta = 2\theta_a^A - 2\theta_b^A + \pi - 2\theta_a^B.$$

En el punto B debe cumplirse la ley de Snell, en donde el ángulo de salida es igual a θ_a^A:

$$\sin\theta_a^A = n\sin\theta_a^B = n\sin\theta_b^A.$$

Desde la última igualdad, $\theta_a^B = \theta_b^A$ y $\Delta = 2\theta_a^A - 4\theta_b^A + \pi$. La desviación puede re-escribirse como

$$\Delta = 2\theta_a^A - 4\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin\theta_a^A\right) + \pi.$$

La condición de desviación estacionaria conduce a la expresión:

$$\frac{d\Delta}{d\theta_a^A} = 2 - \frac{4\cos\theta_a^A}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_a^A}} = 0.$$

La igualdad corresponde al caso $\theta_a^A = \theta_1$ es el ángulo para el cual ocurre la formación del arco iris, entonces:

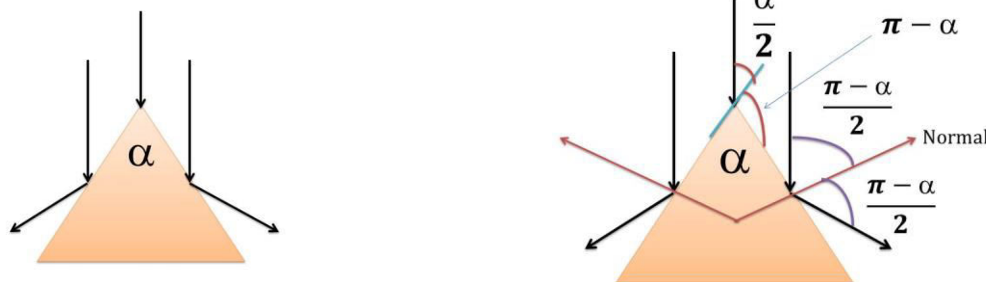
$$\theta_1 = \cos^{-1}\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}.$$

Luz Violeta: $\theta_1 = 58.8883°$, $\Delta = 139.213°$. Luz Roja: $\theta_1 = 59.5849°$, $\Delta = 137.484°$. El primer color del arco iris (el más alto) es Rojo.

Figura tomada de: http://www.yalosabes.com/images//arco-iris.jpg

4.86 Rayos de luz paralelos inciden en un prisma de vidrio como se ilustra en la figura. Demostrar que el ángulo formado entre los dos rayos reflejados es igual al doble del ángulo del prisma α.

R. En la figura adjunta se ilustra la construcción de los ángulos formados por los haces de luz con respecto a la normal del prisma.

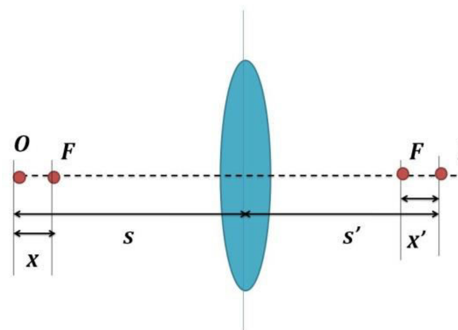


El ángulo de reflexión con respecto a la normal es $(\pi-\alpha)/2$, y con respecto a la superficie es su complementario: $\alpha/2$. Por simetría, el haz reflejado en el lado opuesto del prisma también formará un ángulo $\alpha/2$ con respecto a la superficie. El ángulo entre los dos rayos incidentes es

$$\frac{\alpha}{2}+\alpha+\frac{\alpha}{2}=2\alpha,$$

i.e. el doble del ángulo del prisma.

4.87 ***La forma Newtoniana*** de la ecuación de las lentes viene dada en función de las distancias al objeto y a la imagen desde el primer y el segundo puntos focales. Obtener la ecuación de los lentes en forma Newtoniana. (Ver figura anexa.)



R. En términos de las distancias a los focos, se obtiene: $x' = s' - f$, $x = s - f$. La forma *Gaussiana* de la ecuación de lentes es:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}.$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{x+f}+\frac{1}{x'+f}=\frac{1}{f};$$

el cual puede simplificarse como: $xx'=f^2$.

4.88 Una jarra se llena de glicerina hasta un nivel de profundidad de 100.0 mm. A un observador el fondo le parece estar elevado 32.5 mm. Encontrar el índice de refracción de la glicerina.

R. La profundidad aparente del líquido (Ejercicio ***4.43***) es $d'=d/n$, en donde n es el índice de refracción y d la profundidad real. Según los datos del problema, $d'=100\text{ mm}-32.5\text{ mm}=67.5\text{ mm}$, y el índice es $n=1.481$.

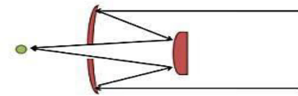
4.89 Un objeto de altura 5 mm se sitúa a 250 mm frente a un espejo convexo de radio de curvatura $R = 400$ mm. (a) Calcular la distancia desde el espejo de la imagen formada. (b) Cuál es el tamaño de la imagen?

R. (Ver Ejemplo ***4.22***). (a) La imagen formada por un espejo convexo es virtual no invertida (derecha), y su posición se obtiene de la fórmula:

$$\frac{1}{s_O}-\frac{1}{s_I}=-\frac{2}{R},$$

$s_I=-111.11$ mm. (b) El tamaño de la imagen es $y'=s_I y/s_O=2.2$ mm.

4.90 ***Un telescopio de Cassegrain*** utiliza dos espejos, como se muestra en la figura. Este telescopio está construido con dos espejos separados $d = 20$ mm. Si el radio de curvatura del espejo grande es $R_1 = 220$ mm y del espejo pequeño es $R_2 = 140$ mm, donde estará la imagen final de un objeto situado en el infinito?

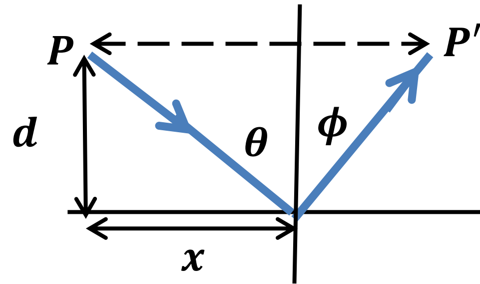


R. La distancia focal del espejo de mayor tamaño es $f_1=R_1/2=110$ mm a la derecha del mismo. La distancia focal del espejo pequeño es $f_2=R_2/2=70$ mm. La distancia del *objeto* formado en el foco del espejo grande con respecto al espejo pequeño es igual a $f_1-d=90$ mm. La distancia imagen formada por éste último se obtiene desde la expresión:

$$\frac{1}{f_1-d}+\frac{1}{s_I}=\frac{1}{f_2}; \quad s_I=315\text{ mm}.$$

4.91 ***Principio de Fermat para la reflexión.*** El principio de Fermat (sección **4.4**) establece que la trayectoria de un rayo de luz entre dos puntos es tal que el tiempo para que la luz viaje

entre ellos es mínimo con respecto a las trayectorias más cercanas. En la figura se muestra la trayectoria que debería seguir un rayo de luz desde el punto ***P*** hasta el punto ***P'***, en el caso de rayos que se reflejan en una superficie. Sea *Δ* la longitud de la trayectoria desde ***P*** hasta ***P'***, y x la posición donde el rayo intersecta al espejo. De acuerdo con el principio de Fermat, la trayectoria verdadera será aquella para la cual la derivada $d\delta/dx$ sea cero, y en la que el tiempo para que la luz viaje de ***P*** a ***P'*** sea mínimo. Hallar la longitud de la trayectoria δ y demostrar que esta longitud es mínima (y por lo tanto el intervalo de tiempo) cuando $x = L/2$.

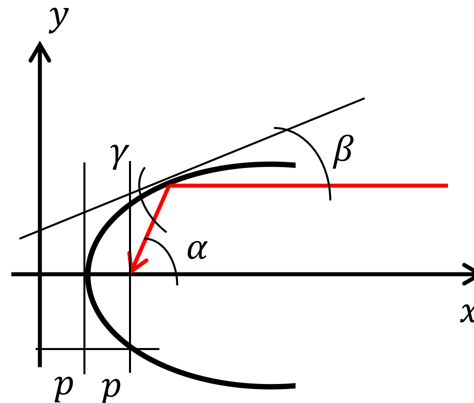


R. La longitud de la trayectoria Δ está dada por: $\Delta = \sqrt{x^2 + d^2} + \sqrt{(L-x)^2 + d^2}$. Al minimizar esta cantidad, se obtiene la ecuación:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}} = 0,$$

la cual tiene solución $x = L/2$. La longitud de la trayectoria de tiempo mínimo es $\Delta_m = 2\sqrt{(L/2)^2 + d^2}$, y el ángulo de incidencia θ es igual al ángulo de reflexión ϕ. El tiempo de recorrido de un haz de luz entre los puntos ***P, P'*** en el vacío es $t = \Delta_m/c$, con c igual a la velocidad de la luz.

4.92 Reflexiones en un espejo parabólico. Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto llamado *foco* y de una línea llamada *directriz.* (a) Para la parábola $y^2 = 4p(x-p)$, demostrar que la directriz es el eje y y el foco en el punto $(2p, 0)$. (b) Hallar la tangente de la parábola, y demostrar que la tangente del ángulo α en la figura es $y/(x-2p)$, en donde (x, y) corresponde a la posición en que el rayo intersecta a la parábola. (c) Demostrar que $\tan(\alpha - \beta) = \tan\beta$. Esta condición significa que todos los rayos perpendiculares a la directriz se reflejan hacia el foco de la parábola.



R. (a) La distancia al foco (localizado en $(2p, 0)$) desde cualquier punto sobre la parábola es:

$$d = \sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$$

mientras que la distancia perpendicular de este punto a la directriz es x. Si estas dos distancias son equidistantes, entonces $x = \sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$. Resolviendo para y, obtenemos: $y^2 = 4p(x-p)$. (b) La tangente a la parábola se obtiene calculando la derivada:

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y},$$

Mientras que la tangente del ángulo α es (el triángulo rectángulo que contiene el ángulo α tiene lados rectos y y $x - 2p$):

$$\tan\alpha = \frac{y}{x - 2p}.$$

(c) Según la gráfica, $\tan\beta = 2p/y$; $\gamma = \alpha - \beta$. La identidad trigonométrica

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

conduce a:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{y}{x - 2p} - \frac{2p}{y}}{1 + \left(\frac{y}{x - 2p}\right)\left(\frac{2p}{y}\right)} = \frac{2p}{y} = \tan\beta,$$

en donde se ha reemplazado $y^2 = 4px - 4p^2$. De este resultado es claro que si el ángulo de incidencia de un rayo perpendicular a la directriz con respecto a la tangente en un punto del espejo es β, el rayo reflejado formará un ángulo $\gamma = \alpha - \beta$ con la línea tangente en ese punto. Para que esta condición se cumpla, el rayo reflejado debe pasar por el foco de la parábola.

4.93 En una zona esférica convexa del espejo retrovisor de un camión, se observa que la parte de atrás del camión, alejada 20 m, tiene una imagen virtual de un veinteavo de su tamaño real. (a) Cuál es el radio de curvatura del espejo? (b) Dónde está la imagen?.

R. (a) La distancia objeto es 20 m, y la distancia imagen (virtual, no invertida y localizada *detrás* del espejo, con una magnificación m de $1/20$ estaría localizada a 1 m del espejo. La distancia focal de este espejo es negativa, por lo tanto el radio de curvatura es:

$$\frac{1}{s = 20} - \frac{1}{|s' = 1|} = -\frac{2}{|R|}$$

$R = -2.1$ m. (b) La imagen estará localizada a 1 m (detrás) del espejo.

4.94 Completar la siguiente tabla para espejos esféricos con rayos paraxiales. Todas las unidades están en mm.

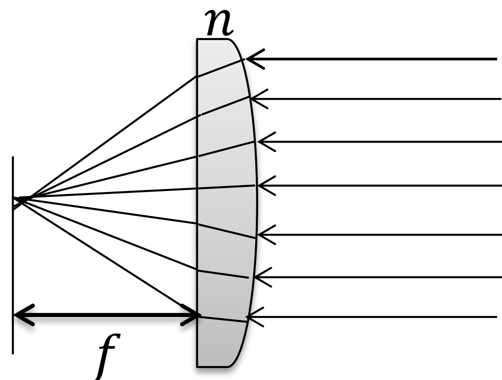
TIPO	RADIO	DISTANCIA FOCAL	DISTANCIA OBJETO	DISTANCIA IMAGEN	¿IMAGEN REAL?	¿IMAGEN INVERTIDA?	M
Convexa	-90	-45	+15	-11.25	No	No	+0.75
Plana			+300				
Cóncava	120		+400				
	-480			-120			
		96		-36			
Convexa			+160				0.5
	∞			-48			
Cóncava				+50	Si		1.5

R.

Tipo	Radio	Distancia focal	Distancia objeto	Distancia imagen	¿Imagen real?	¿Imagen invertida?	M
Convexa	-90	-45	+15	-11.25	No	No	+0.75
Plana	**∞**	**∞**	+300	**-300**	**No**	**No**	**+1**
Cóncava	120	**+60**	+400	**+70.6**	**Si**	**Si**	**-1.18**
Convexa	-480	**-240**	**+240**	-120	**No**	**No**	**+0.5**
Cóncava*	**+192**	+96	**+26.2**	-36	**No**	**No**	**+1.37**
Convexa	**-320**	**-160**	+160	**-80**	**No**	**No**	+0.5
Plana	∞	**∞**	**+48**	-48	**No**	**No**	**+1**
Cóncava	**40**	**20**	**33.3**	+50	Si	**Si**	-1.5

** Resolvemos este caso tomando el signo positivo. La distancia objeto es menor que la distancia focal (positiva) asociada a un espejo cóncavo, y la imagen formada es virtual no invertida y aumentada.*

4.95 Una lente plano-convexa debe tener una distancia focal de 240 mm y debe construirse con un vidrio de índice de refracción de 1.675. Qué radio de curvatura debería tener dicha lente?.



R. Utilizamos la expresión general del constructor de lentes en aire:

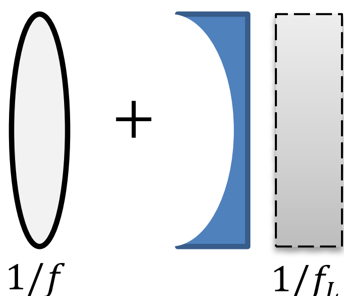
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right),$$

en donde n es el índice del vidrio y d el espesor de la lente.

Despreciando el espesor y considerando que el radio de curvatura del lado plano (R_1) es infinito (el cual se toma con respecto al punto más cercano a la fuente de luz), mientras que el radio de curvatura de la lente está definido por: $R_2 \approx -(n-1)f = -162$ mm.

4.96* El índice de refracción de un líquido puede determinarse mediante el siguiente método: se adjunta una lente biconvexa, de distancia focal medida f y radios de curvatura $\pm R$, a una placa de vidrio plana y se coloca una gota de líquido entre la lente y la placa. De este modo el líquido forma un lente plano cóncavo de radio $-R$. Si se tiene que la distancia focal de la combinación de estas dos lentes es f', demostrar que el índice de refracción del líquido es:

$$n = 1 + R\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right).$$



R. La distancia focal f' puede considerarse como el resultado de la combinación de dos lentes con longitudes focales f y f_L; en donde f_L es la distancia focal producida por una lente "líquida" de geometría plano-cóncava de índice de refracción n. La ecuación para f' es por lo tanto:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_L}.$$

Utilizando la ecuación del constructor de lentes (Ver ejemplo ***4.95***), el inverso de la distancia focal de la lente "líquida" de radio $-R$ y plana sobre la segunda superficie es:

$$\frac{1}{f_L} = (n-1)\left(-\frac{1}{R}\right).$$

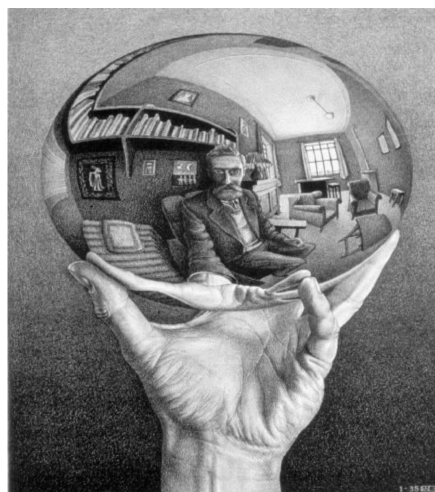
Combinando las dos expresiones anteriores:

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{1}{f_L} = -(n-1)\left(\frac{1}{R}\right);$$

despejando la expresión anterior se obtiene el índice de refracción del líquido:

$$n = 1 + R\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right).$$

4.97 Estimar la distancia focal del espejo de la figura. Es virtual o real la imagen de la cara del hombre? ("*Hand with reflecting sphere*", M. C. Escher, 1935). http://www.mcescher.com/



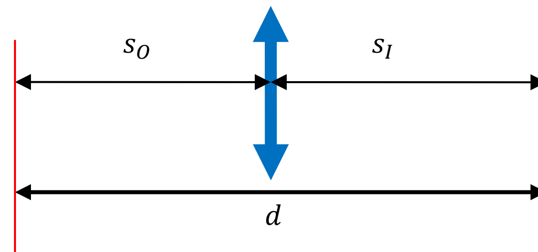
R. El mundo de Escher, en esta intrigante pieza artística titulada *Mano con globo reflectante*, pareciera estar atrapado por reflexión. La única pista de validez que el observador tiene en la esfera reflectora es la mano del artista, la cual incidentalmente combina simultáneamente la realidad y la imagen por reflexión. La luz, la cual proviene de la ventana detrás desde donde Escher está sentado, ilumina cada pieza del inmobiliario, crea a su vez tonalidades y sombras debajo de la cara de Escher, y establece de esta forma una sensación de profundidad.

El artista conduce al observador a dar crédito a la realidad de la esfera en la cual éste está absorbido, contagiándolo al mismo tiempo de su actitud contemplativa y segura de su reflexión. El control de Escher como artista es notorio, no sólo por colocarse a sí mismo como pieza central, sino también por mantener (sostener) la imagen reflejada no invertida, gesto simbólico que indica que tiene un control firme sobre ambos mundos, capturando al

observador en la imagen que ha creado. Un estimativo simple de las dimensiones típicas de la anatomía de un hombre europeo adulto (36 años en enero de 1935), puede hacerse considerando que su mano pudiera haber tenido unos 22 cm entre el extremo del dedo pulgar y el extremo del dedo medio. Con este dato puede inferirse que la esfera puede tener unos 28 cm de diámetro, es decir unos 14 cm de radio y una distancia focal de unos 7 cm. La imagen es no invertida, disminuida y virtual. Si asumimos que la estatura promedio de un holandés es de 1.83 m (http://en.wikipedia.org/wiki/Human_height), y que ésta no ha variado significativamente en los últimos 80 años, la distancia desde el rostro hasta la esfera con el brazo (casi completamente) estirado es alrededor de 92 cm (considerando una proporción del tamaño de la cabeza de 9 pulgadas). La imagen de su rostro se formará entonces a unos -6.50 cm, con una magnificación de +0.070.

4.98 Demostrar que la mínima distancia desde el *objeto real* a una *imagen real* para una lente convergente es $4f$.

R. La distancia entre el objeto y la imagen real en una lente convergente es $d = s_I + s_O$. La relación entre las distancias y el foco es $f^{-1} = s_I^{-1} + s_O^{-1}$. Combinando estas dos expresiones obtenemos:



$$d = s_O\left(1 + \frac{f}{s_O - f}\right).$$

Minimizando con respecto a s_O:

$$\frac{\partial d}{\partial s_O} = 1 + \frac{f}{s_O - f} - \frac{s_O f}{(s_O - f)^2} = 0,$$

cuya solución es $s_O = 2f$. Al reemplazar en la ecuación para d, finalmente se obtiene $d = 4f$.

4.99 Una esfera transparente en el aire de 200 mm de diámetro forma en su superficie posterior una imagen de rayos paraxiales de un objeto alejado 1000 mm. Cuál es el índice de refracción de la esfera?

R. Las distancias al objeto y a la imagen en una esfera de radio R de un material con un índice de refracción desconocido n en aire (n_{aire}) están relacionadas por:

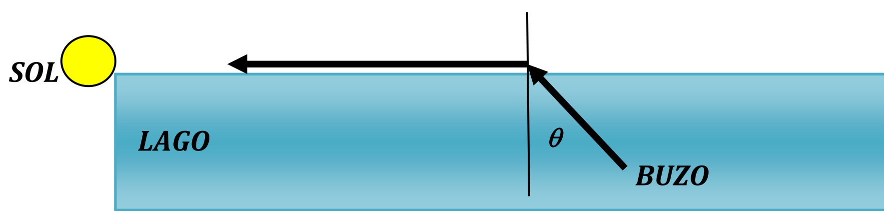
$$\frac{n-1}{R} = \frac{n}{s_I} + \frac{1}{s_0}.$$

Si la imagen se forma en la superficie posterior, i.e., $s_I = 2R$, el índice de refracción se estima como:

$$\frac{n-1}{R} = \frac{n}{2R} + \frac{1}{s_0}, \qquad n = 2\left(1 + \frac{R}{s_0}\right) = 2.2$$

Para un objeto localizado en el *infinito,* la imagen se formará a 0.83 mm desde el centro de la esfera.

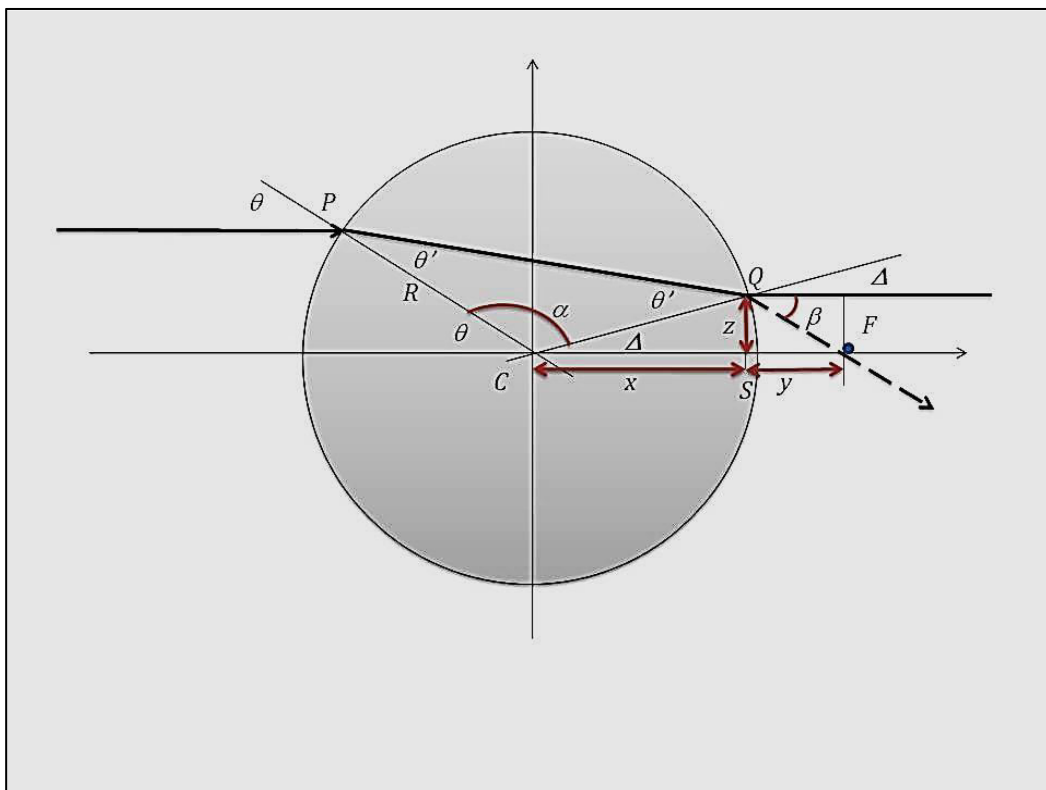
4.100 Calcular el ángulo mínimo con respecto a la vertical en el cual un buzo bajo el agua de un lago tranquilo puede observar la puesta del Sol. Despreciar los efectos de los lentes de buceo.



R. En este caso es suficiente con obtener el ángulo crítico de un rayo que se propaga rasante a la superficie del lago. Con los datos de la tabla 4.1: $n = 1.33$,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 48.75°.$$

4.101 Distancia focal de una esfera transparente. Hallar la distancia focal de una esfera transparente de vidrio de radio R en aire, en la aproximación paraxial. El índice de refracción de la esfera es n.



R. Un rayo paraxial incide en el punto P con un ángulo θ con respecto a la normal desde la izquierda de la esfera. Este rayo experimenta una refracción con ángulo θ' definido por:

$$\sin\theta = n\sin\theta'.$$

La longitud focal desde el centro C de la esfera es $f = x + y$. El valor de la distancia x está dado por el ángulo Δ que forma el segmento $\overline{CQ}$ con respecto al eje horizontal: $x = R\cos\Delta$. Del triángulo ΔPCQ se deduce $2\theta' + \alpha = \pi$; $\Delta = 2\theta' - \theta$. En el punto Q aplicamos nuevamente la ley de Snell para deducir:

$$\sin\theta = n\sin\theta' = \sin(\Delta + \beta),$$

o en forma equivalente, $\theta = \Delta + \beta$, $\beta = \theta - \Delta = 2(\theta - \theta')$. Del triángulo rectángulo ΔSQF tenemos: $\tan\beta = z/y$, con $z = R\sin\Delta$ como la longitud del segmento $\overline{SQ}$. Insertando todos estos resultados en la expresión para la distancia focal, finalmente arribamos a:

$$f = R\left[\cos(2\theta' - \theta) + \sin(2\theta' - \theta)\frac{\cos(2\theta - 2\theta')}{\sin(2\theta - 2\theta')}\right].$$

La distancia focal es por lo tanto función del índice de refracción y del ángulo de incidencia del rayo con respecto a la normal. En la aproximación de ángulo pequeño, $\theta = n\theta'$, y la distancia focal se reduce a:

$$f = \frac{R}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

Para una gota de agua en el aire con $n = 4/3$, la distancia focal es $2R$. Si la esfera está inmersa en un medio con índice de n_m, el análisis geométrico sigue siendo válido, excepto que ahora la relación entre los ángulos θ y θ' es $n_m \sin\theta = n\sin\theta'$. Análogamente la distancia focal se modifica como:

$$f_m = \frac{R}{2}\left(\frac{n}{n - n_m}\right).$$

4.102 Demostrar que la fórmula del problema anterior puede deducirse de la fórmula general del constructor de lentes gruesos, con $R_1 = R$, $R_2 = -R$ y $d = 2R$.

R. Partimos de la expresión:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right).$$

Reemplazando las condiciones anteriores, en efecto

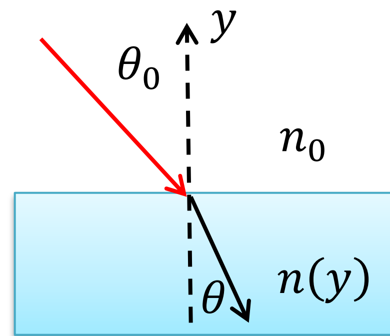
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} - \frac{2(n-1)}{nR}\right) = \frac{2(n-1)}{nR}.$$

4.103 Calcular la magnificación de un objeto de localizado a 6 mm del vértice de una canica de vidrio de 12 mm de diámetro y con índice de refracción 3/2.

R. Utilizando las fórmulas anteriores (Ej. ***4.101***), calculamos la distancia focal como 9 mm, y la magnificación es:

$$M = -\frac{s_I}{s_O} = -\frac{f}{s_0 - f} = +3.$$

4.104 Refracción en un medio no homogéneo. Un medio no homogéneo estratificado tiene un índice de refracción que varía según la dirección y, esto es $n = n(y)$. Obtener la ecuación del camino óptico del rayo.



R. A una distancia y desde un punto de referencia, el rayo debe obedecer la condición de Snell: $n(y)\sin\theta = n_0 \sin\theta_0 = c$ (constante), siendo θ el ángulo con respecto a la normal del rayo en un punto con coordenadas (x, y). Utilizando la relación $\tan\theta = \sin\theta/\sqrt{1-\sin^2\theta}$, obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{c}{\sqrt{n(y)^2 - c^2}} = \frac{dx}{dy}.$$

Integrando a ambos lados, se obtiene la ecuación para la desviación lateral del camino óptico Δx:

$$\Delta x = x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{cdy}{\sqrt{n(y)^2 - c^2}}.$$

4.105 Una lente delgada de potencia óptica $D = 1/f$ forma una imagen de aumento M. Hallar la distancia de la lente al objeto y a la imagen.

R. Combinando las expresiones:

$$\frac{1}{s_O} + \frac{1}{s_I} = D, \quad M = -\frac{s_I}{s_O},$$

la distancia imagen es $s_I = (1 - M)/D$, mientras que la distancia objeto se define como $s_I = (M - 1)/MD$.

4.106 Una lente positiva, construida con un material de índice $n_L = 2$, y un espejo tienen la misma distancia focal en el aire. Cuál tiene la menor distancia focal en el agua con $n_w = 4/3$?.

R. La relación de las distancias focales de una lente delgada en el aire y en el agua es:

$$\frac{f_w^L}{f_a^L} = \frac{n_L - 1}{n_L/n_w - 1},$$

mientras que la distancia focal del espejo en agua disminuye según el índice de refracción:

$$f_w^E = \frac{f_a^L}{n_w}.$$

De esta forma:

$$\frac{f_w^L}{f_w^E} = n_w^2\left(\frac{n_L - 1}{n_L - n_w}\right) = \frac{8}{3}.$$

Se concluye que el espejo tiene menor distancia focal en el agua.

4.107 Completar la tabla siguiente para superficies de refracción esféricas (también conocidas como dioptrios). Todas las medidas están en mm. Tomar $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.33$ y suponer que todos los rayos son paraxiales.

TIPO	RADIO	DISTANCIA OBJETO	DISTANCIA IMAGEN	IMAGEN REAL?	IMAGEN INVERTIDA?
Convexa	-90	+15	-19	No	No
Plana		+300			
	+120		+480		
	-480	+120			
		+96	-96		

R.

TIPO	RADIO	DISTANCIA OBJETO	DISTANCIA IMAGEN	IMAGEN REAL?	IMAGEN INVERTIDA?
Convexa	-90	+15	-19	No	No
Plana**(i)**	**+∞**	+300	**-400**	**Si**	**No**
Cóncava(ii)	+120	**+∞**	+480	**No**	**No**
Convexa(iii)	-480	+120	**-148**	**No**	**No**
Convexa(iii)	**-96**	+96	-96	**No**	**No**

(i) La distancia imagen se obtiene como $s_I = -ns_O$, y la magnificación $M = -s_I/ns_O = +1$.

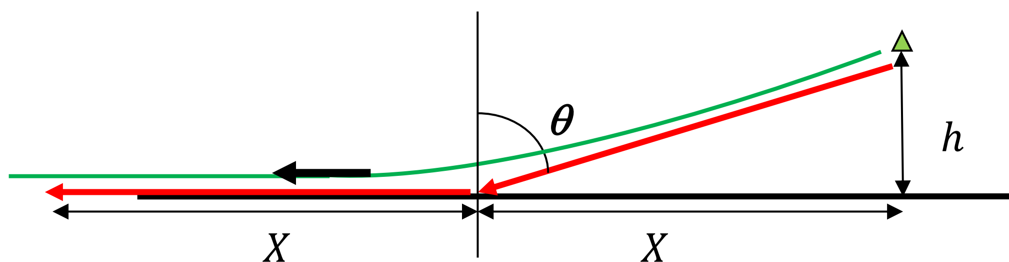
(ii) La imagen se localiza justo en el punto focal.

(iii) Una lente convexa forma una imagen virtual no invertida cuando la distancia objeto es menor que la distancia focal objeto.

4.108 Un gradiente de temperatura vertical en el aire cambia el índice de refracción según la fórmula:

$$n(z) = n_0(1 + Az);$$

en donde n_0 es el índice de la superficie, $A = 1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$, y z está medido en metros. Si una persona tiene los ojos ubicados a $h = 1.70$ m sobre la superficie, cuál es la distancia horizontal máxima en el cual la visión es posible bajo estas condiciones? (Ver Ejercicio ***4.104***).



R. La trayectoria del haz incidente (línea verde) es curvilínea y cóncava cuando el índice de refracción aumenta con la coordenada vertical. La ley de Snell en cualquier punto obedece:

$$n(z)\sin\theta = \text{constante} = n_0 \sin(90°) = n_0.$$

Para cualquier distancia horizontal x, la tangente del ángulo θ puede escribirse como:

$$\frac{dx}{dz} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}; \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{n_0}{\sqrt{n(z)^2 - n_0^2}}.$$

Integrando:

$$\int_X^{-X} dx = \int_h^0 \frac{n_0}{\sqrt{n(z)^2 - n_0^2}} dz = -2X = -\left(\frac{2}{A}\right)\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{Ah}{2}}\right],$$

El cual proporciona la distancia horizontal X recorrida por el rayo justo antes de incidir paralelamente a la superficie. Numéricamente: $X = 752.77$ m. Una forma alternativa de resolver este ejercicio consiste en considerar los ángulos de incidencia θ y el ángulo paralelo a la superficie ($\theta = 90°$) en la ecuación:

$$n(z)\sin\theta = \text{constante} = n_0 \sin(90°) = n_0.$$

En $z = h$, $\sin\theta = X/\sqrt{X^2 + h^2}$. Despejando $X = h/\sqrt{2Ah + A^2h^2} = 752.7$ m.

4.109 Un rayo incide perpendicularmente a la cara AB de un prisma de vidrio con índice 1.52. Si el prisma está rodeado de aire, hallar el valor máximo del ángulo ϕ de tal forma que el rayo se refleje totalmente en la cara AC. Repetir el problema si el prisma se sumerge en agua con índice de refracción 4/3.

R.



Según el diagrama de la derecha, el ángulo de incidencia con respecto a la normal es $90° - \phi$. Aplicando la fórmula para el ángulo crítico:

$$n\sin(90° - \phi) = 1\,, \qquad \phi = 48.86°.$$

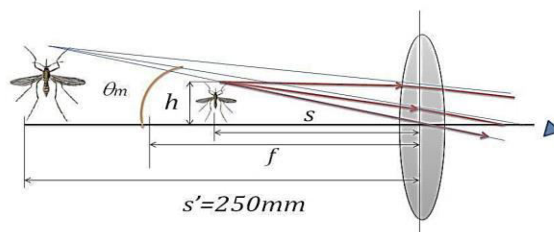
En el caso en que el prisma esté rodeado de agua:

$$n\sin(90° - \phi) = n_{agua}, \quad \cos(\phi) = n_{agua}/n\,, \qquad \phi = 28.72°.$$

4.110 Microscopio simple. La figura muestra un microscopio simple de distancia focal f, con el ojo focalizado en un punto correspondiente a $s' = 250$ mm. (a) Demostrar que el ángulo subtendido en el ojo por el objeto, en el punto próximo, y sin la lente, es $\theta_u \approx h/250$ mm, y que el ángulo subtendido por la imagen cuando se sitúa la lente es $\theta_m \approx h/s$, donde $1/s - 1/s' = 1/f$. (b) Demostrar que $M = 1 + 250\ (\text{mm})/f$.

http://www.mosquito.org/assets/Images/madult.jpg

R. (a) Sin lente, el ángulo subtendido por el objeto localizado en el punto próximo de un ojo normal (250 mm) es: $\tan\theta_u = h/250\text{ mm} \approx \theta_u$. Cuando la lente se sitúa entre el ojo y el objeto, la imagen formada de altura y' se relaciona con el ángulo subtendido θ_m como:



$$\theta_m \approx \frac{y'}{s'} = \frac{h}{s},$$

en donde la relación $y'/h = s'/s$ se ha utilizado. (b) Manipulación matemática simple conduce a: $s = 250f/(250+f)$ (mm).

$$M = \frac{\theta_m}{\theta_u} = \frac{250\text{mm}}{s} = \left(1 + \frac{250\text{mm}}{f}\right).$$

4.111 (a) Cuál es la distancia focal de un microscopio simple de aumento 3X, donde dicho aumento se mide con el ojo focalizado en el infinito?. (b) Cuál es el máximo aumento que una persona joven, con un poder de acomodación de 70 mm, podría obtener de este microscopio?.
R. (a) En este caso se considera que la imagen se forma en el infinito (ojo relajado), y el objeto se localiza en el foco de la lente. Para un ojo normal con un punto próximo a 250 mm, el aumento de la lente es:

$$M = \frac{\theta_m}{\theta_u} = \frac{250\text{ mm}}{s} = \frac{250\text{ mm}}{f}.$$

La distancia focal es (con $M = 3$) igual a 83 mm. (b) Si la distancia de acomodación (la longitud mínima en la que un ojo puede capturar las imágenes sin que aparezcan borrosas), es la distancia en que el microscopio forma una imagen virtual a -70 mm de la lente, con un foco de 83 mm, el objeto se debería colocar en 37.97 mm. La magnificación en este caso es: $M = 70/37.97 = 1.84$. Si el objeto se mantiene en el punto próximo, la imagen virtual se formará a -447 mm de la lente con $M = 6.38$. El valor máximo posible de magnificación es $M = 6.38$.

4.112 Suponer que las aberturas de las rendijas en el experimento de la doble rendija tienen tamaños distintos, de manera tal que las componentes vectoriales del campo eléctrico debido a las ondas poseen amplitudes diferentes:

$$E_1 = E_{01}\sin(\omega t)\,; \quad E_2 = E_{02}\sin(\omega t + \phi).$$

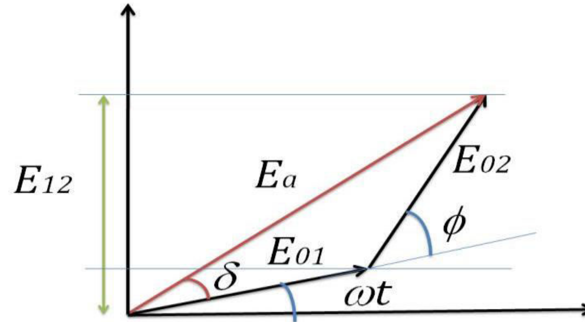
(a) Demostrar que la componente E_{12} vertical del campo resultante es:

$$E_{12} = E_a \sin(\omega t + \delta),$$

en donde E_a es la amplitud de la onda resultante y δ una constante de fase.

(b) Hallar E_a y la intensidad de la onda resultante.

R. El diagrama de fasores se ilustra en la siguiente figura.



(a) La componente vertical del fasor resultante es: $E_a \sin(\omega t + \delta)$.

(b) Utilizando el teorema del coseno:

$$E_a = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02}\cos(\pi - \phi)}.$$

La intensidad promedio de la onda resultante es proporcional a la amplitud del campo eléctrico: $\langle I \rangle \propto E^2$, de esta forma, desde la ecuación anterior:

$$\langle I_a \rangle = \langle I_{01} \rangle + \langle I_{02} \rangle + 2\sqrt{\langle I_{01} \rangle \langle I_{02} \rangle}\cos\phi.$$

El ángulo de fase resultante puede obtenerse de la relación:

$$\tan\delta = \frac{E_{01}\sin(\omega t) + E_{02}\sin(\omega t + \phi)}{E_{01}\cos(\omega t) + E_{02}\cos(\omega t + \phi)}.$$

Cuando las amplitudes son iguales a E_0, la intensidad resultante es (cfr. ***4.78*** y ***4.83***):

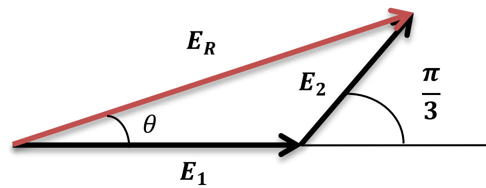
$$\langle I_a \rangle = 4\langle I_0 \rangle \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

PR 4.5. Hallar la suma de los siguientes campos utilizando (a) método fasorial y (b) identidades trigonométricas.

$$E_1(t) = (5 \text{ v/m}) \sin(\omega t),$$

$$E_2(t) = (3 \text{ v/m}) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

R. (a) Una representación fasorial de estos campos puede verse como:



La magnitud del campo resultante es, aplicando el teorema del coseno:

$$E_R = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 7\ \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right).$$

El ángulo de fase θ se obtiene desde la ley de los senos:

$$\frac{E_R}{\sin(2\pi/3)} = \frac{E_2}{\sin(\theta)}.$$

Resolviendo para θ: $\theta = 0.380251$ rad. El campo resultante puede escribirse como:

$$E_R(t) = 7\sin(\omega t + 0.380251)\ (\text{V/m}).$$

(b) Utilizando identidades

$$E_R(t) = (5\ \text{V/m})\sin(\omega t) + (3\ \text{V/m})\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$E_R(t) = 5\sin(\omega t) + 3\sin(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\omega t)$$

$$E_R(t) = 5\sin(\omega t) + \frac{3}{2}\sin(\omega t) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t)$$

$$E_R(t) = \frac{13}{2}\sin(\omega t) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t)$$

Esta última expresión tiene la forma:

$$E_R(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

la cual puede escribirse también como:

$$E_R(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos(\omega t)\right),$$

$$E_R(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \theta)$$

con

$$\sin(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad \cos(\theta) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\tan\theta = \frac{B}{A} = \frac{3\sqrt{3}}{13}; \quad \theta = 0.380251.$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 7.$$

4.113 Un haz de luz parcialmente polarizado puede ser considerado como dos haces incoherentes con intensidades diferentes y con sus planos de polarización perpendiculares. Si $\langle I_1 \rangle$ es la intensidad del haz más intenso e $\langle I_2 \rangle$ es la intensidad del haz menos intenso: (a) Calcular la intensidad transmitida cuando un haz parcialmente polarizado incide en un polarizador ideal, siendo θ el ángulo entre el eje de transmisión del polarizador y el plano de polarización del haz más intenso. (b) Demostrar que la intensidad transmitida por el polarizador puede escribirse como:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle \frac{1 + P\cos(2\theta)}{1 + P},$$

donde P es el grado de polarización del haz.
R. (a) Utilizando la ley de Malus, la intensidad transmitida por el haz más intenso es: $\langle I_1 \rangle \cos^2 \theta$, mientras que la intensidad del haz menos intenso, cuyo plano de polarización forma un ángulo $90° - \theta$ es: $\langle I_2 \rangle \sin^2 \theta$. La intensidad resultante es:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle \cos^2 \theta + \langle I_2 \rangle \sin^2 \theta = \langle I_2 \rangle + (\langle I_1 \rangle - \langle I_2 \rangle) \cos^2 \theta.$$

(b) Utilizando la identidad $\cos^2 \theta = [1 + \cos(2\theta)]/2$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2}(\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle) + \frac{1}{2}(\langle I_1 \rangle - \langle I_2 \rangle)\cos(2\theta).$$

Definiendo el grado de polarización como:

$$P = \frac{\langle I_1 \rangle - \langle I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle}, \qquad \frac{\langle I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle} = \frac{1 - P}{1 + P}.$$

Algebra simple conduce a:

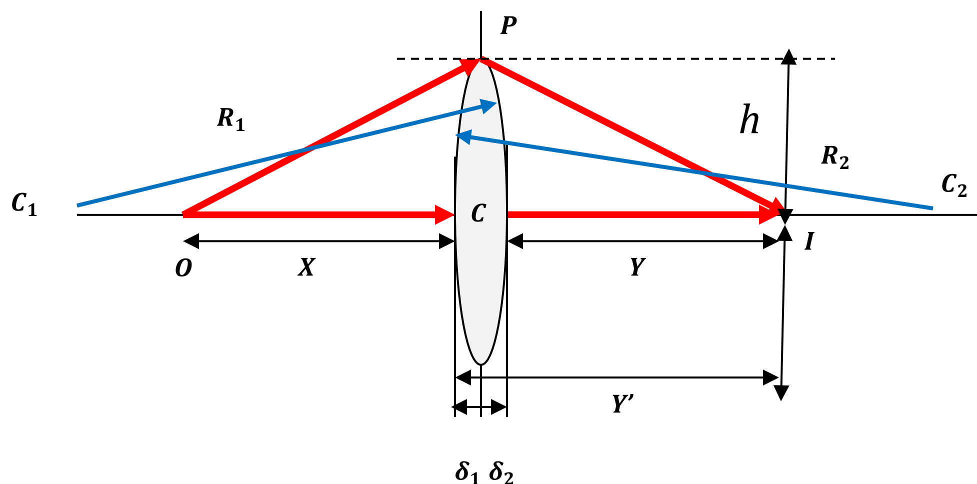
$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle \frac{1 + P\cos(2\theta)}{1 + P}.$$

4.114 ***Película delgada.*** Sobre la superficie de un vidrio ($n' = 1.50$) se coloca una película delgada de un material transparente con $n = 1.29$. Cuál es el mínimo espesor de la película que minimiza la reflexión de la luz que incide normalmente con longitud de onda de 600 nm?.
R. En este ejercicio nos referimos a la tabla **4.2**. Si la onda viaja desde un medio de menor índice (aire) hacia un medio con mayor índice de refracción (película transparente con $n = 1.29$) sobre un sustrato $n' = 1.50$, entonces se cumple la condición: $n_{aire} < n < n'$. En este caso la onda reflejada experimentará un cambio de fase total igual a cero y existirá

interferencia destructiva cuando su espesor mínimo cumpla la condición ($m = 1$ en la tabla **4.2**):

$$d = \frac{\lambda}{4n} = 116.3 \text{ nm}.$$

4.115* Deducir la ecuación para las lentes delgadas (convergentes) utilizando el principio de Fermat.



R. El principio de Fermat establece que el tiempo de recorrido del rayo de luz entre el punto objeto y su imagen debe ser mínimo. Las trayectorias de los rayos que provienen del objeto son diferentes, pero el tiempo de recorrido debe ser el mismo. Seleccionamos dos de ellas, sin pérdida de generalidad: ***OPI*** y ***OCI***. El tiempo de recorrido en la trayectoria ***OPI*** es:

$$tOPI = \frac{1}{c}\left[\sqrt{(X+\delta_1)^2 + h^2} + \sqrt{(Y+\delta_2)^2 + h^2}\right],$$

mientras que para la trayectoria ***OCI***

$$tOCI = \frac{1}{c}[X + Y + n(\delta_1 + \delta_2)],$$

en donde n es el índice de refracción del lente y c la velocidad de la luz en el vacío. Estos tiempos deben ser iguales ($t = tOCI = tOPI$), por lo tanto, es posible construir una ecuación que relacione el tiempo total de recorrido del haz en términos de la posición del objeto X (o su imagen Y, desde el segundo vértice de la lente). Después de cierta álgebra, obtenemos:

$$t(X) = -\frac{(\delta_1+\delta_2)(-1+n)(\delta_1 - \delta_2 + (\delta_1+\delta_2)n + 2X)}{2c\left(\delta_2 - (\delta_1+\delta_2)n - X + \sqrt{h^2 + (\delta_1 + X)^2}\right)}.$$

La posición del objeto que minimiza el tiempo de recorrido del haz se obtiene resolviendo:

$$\frac{\delta t(X)}{\delta X}=0; \qquad X=\frac{1}{4}\left[-3\delta_1+\delta_2+\frac{4h^2}{(\delta_1+\delta_2)(-1+n)}-(\delta_1+\delta_2)n\right].$$

Análogamente, en términos de la posición de la imagen *Y:*

$$Y=\frac{1}{4}\left[\delta_1-3\delta_2+\frac{4h^2}{(\delta_1+\delta_2)(-1+n)}-(\delta_1+\delta_2)n\right].$$

Los radios de curvatura de la lente con respecto a los centros C_1 y C_2 pueden relacionarse con las distancias δ_1 y δ_2, y en la aproximación paraxial, $h \ll R_1, h \ll R_2$,

$$\delta_1=R_1-R_1\sqrt{1-\left(\frac{h}{R_1}\right)^2}\cong\frac{h^2}{2R_1}; \quad \delta_2\cong\frac{h^2}{2R_2}.$$

Al reemplazar estos resultados en la expresión de la suma de los inversos de las distancias al objeto y a la imagen desde el primer vértice: $Y'=Y+(\delta_1+\delta_2)$, y efectuando la aproximación de primer orden, con $h\to 0$, finalmente se obtiene:

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

En este caso no se tiene en cuenta la convención de los signos asociada a los radios de las curvaturas de la lente.

4.116 La ley de Brewster, $\tan\theta_p=n_2/n_1$, proporciona el ángulo de incidencia (para un haz que incide desde el medio 1 sobre la superficie que separa los medios 1 y 2) tal que el haz reflejado está completamente polarizado. Supongamos que θ_{1p} representa este ángulo de polarización y que θ_{2p} representa el ángulo correspondiente del haz refractado. Supongamos ahora que un haz incide desde el medio 2 sobre la superficie que separa los medios 1 y 2. Demostrar que el ángulo de polarización para este haz es θ_{2p}.

R. La ley de Brewster indica que la luz reflejada estará completamente polarizada siempre que el ángulo de incidencia (ángulo de polarización) se relacione con el ángulo refractado como:

$$\theta_p+r=\frac{\pi}{2}.$$

El ángulo refractado en el primer caso es: $\theta_{2p}=\pi/2-\theta_{1p}$. Si el haz de luz incide desde el medio 2 entonces: $\tan\theta_p=n_1/n_2$. Reemplazando en la condición de Brewster:

$$\tan\theta_{1p} = \frac{n_2}{n_1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2p}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2p}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2p}\right)} = \frac{\cos(\theta_{2p})}{\sin(\theta_{2p})} = \frac{1}{\tan(\theta_{2p})},$$

obtenemos la ecuación para el ángulo de polarización de un haz incidente desde el segundo medio (o de forma equivalente, que corresponde al haz refractado desde el primer medio):

$$\tan(\theta_{2p}) = \frac{n_1}{n_2}.$$

4.117 Suponer que el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz que incide desde un medio 2 sobre la superficie de separación entre los medios 1 y 2 es 0.68 rad. (a) Cuál es el ángulo de polarización para la luz que incide desde el medio 2? (b) Cuál es el ángulo de polarización para la luz que incide desde el medio 1?
R. El ángulo de incidencia que produce reflexión total es:

$$\sin\theta = \frac{n_1}{n_2} = \sin(0.68 \text{ rad}) = 0.63.$$

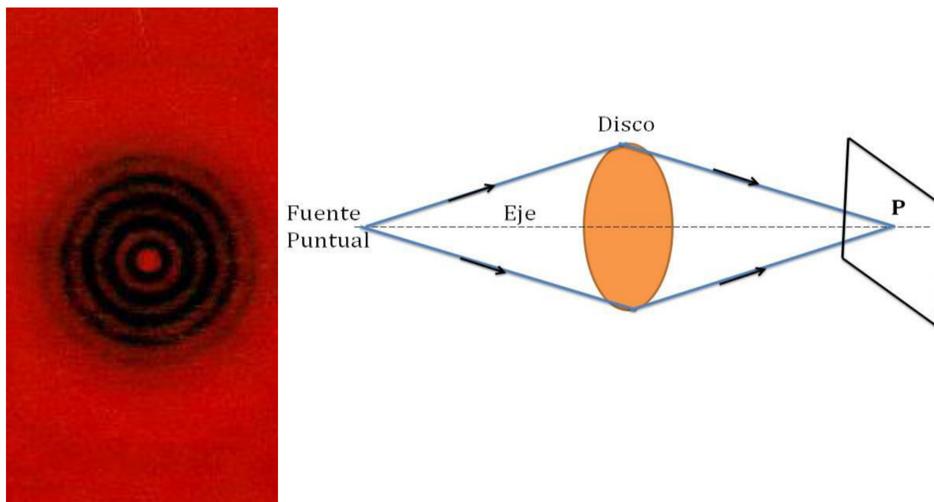
(a) El ángulo de polarización para la luz incidente desde el medio 2 se calcula desde la ley de Brewster:

$$\tan^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \theta_{2p} = \tan^{-1}(0.63) = 32.2°.$$

(b) El ángulo de polarización para la luz que incide desde el medio 1:

$$\tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \theta_{1p} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.63}\right) = 57.8°.$$

4.118 Disco de Arago (o mancha de Poisson). Explicar cualitativamente la formación del punto de Arago. En la figura se ilustran dos rayos que pasan por el borde del disco e inciden en la pantalla. Qué puede decirse sobre la diferencia de camino entre estos dos rayos?. Qué puede decirse sobre la diferencia de fase entre las ondas de luz que viajan a lo largo de estos rayos? Generalizar las conclusiones para incluir todas las ondas de luz que pasan por el borde del disco.
R.



Los puntos del borde del disco actuarán como fuentes puntuales de ondas coherentes por principio de Huygens. Los rayos que alcanzan el borde del disco perpendicular al eje óptico y que provienen de una fuente puntual, son difractados hacia la pantalla. La diferencia de recorrido para cualquier par de rayos provenientes del perímetro del disco y que alcanzan el punto **P** en la pantalla (sobre el eje óptico), es igual a cero, presentándose el fenómeno de interferencia constructiva en ese punto. La diferencia de fase es también igual a cero. Este análisis simple puede repetirse para cualquier par de rayos que emergen del borde del disco, incrementando la intensidad de la onda resultante sobre **P**, con un valor cercano al valor de la intensidad de la fuente puntual, según la hipótesis inicial de Poisson. El análisis matemático de este fenómeno requiere fundamentos por fuera del alcance de este texto. Se remite al lector interesado a las siguientes referencias:
http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/Encuentro/Full_text/opt_fourier/Off-01-o.pdf
Gráfica tomada de http://aics-research.com/art/low-poissons-spot.jpg

4.119 Cuál es el ángulo mínimo de resolución (cfr. Ejs. ***4.72*** y ***4.82***) de un telescopio cuya abertura tiene un diámetro de 75 mm? La luz de los objetos observados tiene una longitud de onda de 500 nm.
R. El límite de resolución de un instrumento óptico tiene un límite descrito por el criterio de Rayleigh. El ángulo mínimo de resolución es:

$$\Delta\theta_R \cong 1.22\left(\frac{\lambda}{d}\right) = 8.13 \times 10^{-6}\ \text{rad},$$

en donde d es el diámetro de abertura del instrumento, y λ la longitud de onda incidente.

4.120 Poder de resolución del ojo humano. Estimar la distancia máxima a la que una persona (con buena vista y sin ayuda de ningún instrumento) puede distinguir por separado los dos faros encendidos de un automóvil. El diámetro de la pupila del ojo puede variar entre 2 y 9 mm.

R. Los límites de resolución angular del ojo humano pueden estimarse utilizando los valores extremos de la abertura de la pupila con los valores límite de las longitudes de onda visibles emitida por los faros del auto (~390 nm-750 nm):

$$\Delta\theta_R \cong 1.22\left(\frac{\lambda}{d}\right).$$

Los valores extremos están en el rango $52.87 - 457.5\ \mu\text{rad}$. Si los faros están separados una distancia de arco aproximada de 1.5 m, éstos estarán resueltos a unas distancias:

$$R \approx \frac{s}{\Delta\theta_R} \approx \{3.2\ \text{km} - 28.4\ \text{km}\}.$$

4.121 Dos estrellas, cada una de las cuales produce más o menos la misma intensidad de luz en la Tierra, tienen una separación angular de 7 μrad. Si la luz de las estrellas tiene una longitud de onda promedio de 600 nm. Cuál es el diámetro de abertura mínimo necesario para resolverlas?.

R. Utilizando

$$d = 1.22\frac{\lambda}{\Delta\theta} = 0.104\ \text{m}.$$

4.122 Una rendija se ilumina con luz cuyas longitudes de onda λ_1 y λ_2 se escogen de tal manera que el primer mínimo de difracción de λ_1 coincida con el segundo mínimo de λ_2. Cuál es la relación entre las dos longitudes de onda?

R. En el experimento de difracción de Fraunhofer de una rendija, los mínimos estarán localizados según:

$$a\sin\theta = m\lambda\,,\ \ m = 1,2,3\ldots$$

Si el ángulo de incidencia es el mismo en ambos casos, entonces la condición del problema debe cumplir

$$1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}.$$

En general, los mínimos de diferentes órdenes coinciden bajo la condición:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\lambda}{\lambda'};$$

en donde m' (m) es el orden del mínimo asociado a λ' (λ).

4.123 Una fuente luminosa que contiene una mezcla de átomos de Hidrógeno y Deuterio y emite un doblete rojo en 656.3 nm cuya separación es de 0.18 nm. Hallar el número mínimo de rendijas que se necesitan en una red de difracción para separar estas líneas en el primer orden.
R. El poder de resolución de una red de difracción de orden m puede calcularse como:

$$R = mN$$

siendo N el número de rejillas. En el primer orden, $R = N$. Adicionalmente:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{656.3 \text{ nm}}{0.18 \text{ nm}} = 3646 = N.$$

Las líneas de emisión del gas estarán resueltas en el primer orden para una red con un mínimo de 3646 rejillas.

4.124 Una red de difracción de 2 cm de ancho tiene 6000 surcos. A qué ángulos ocurrirán los máximos de intensidad en los haces si la radiación incidente tiene una longitud de onda de 589 nm?.
R. La separación entre fuentes es:

$$a = \frac{2}{6000} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

La posición de los máximos de intensidad pueden estimarse de la condición (Cfr. Ej. ***4.50***):

$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$$

$$a\sin\theta = m\lambda.$$

Para el máximo de primer orden,

$$\theta = 10.28°.$$

Otros valores de los ángulos que maximizan la intensidad, según el orden m:

$$20.91°, 32.37°, 45.56°, 63.17°.$$

En este caso sólo se podrán detectar máximos de intensidad de orden 5.

4.125 Al cubrir una de las aberturas de un aparato de doble rendija con una película dieléctrica de índice $n = 1.58$, el punto central de la pantalla queda ahora ocupado por lo que anteriormente era la séptima franja brillante. Si la longitud de onda incidente es de $\lambda = 550$ nm, calcular el espesor de la película.
R. La distancia (sobre la pantalla) entre el máximo central de interferencia y la séptima franja brillante sin película dieléctrica es:

$$\Delta y \approx \frac{D\Delta r}{d} = 7\frac{D\lambda}{d},$$

en donde D es la distancia desde el aparato hasta la pantalla y d corresponde a la distancia entre las aberturas. Al insertar la película, la diferencia de fase debido al recorrido adicional de uno de los rayos emergentes de una de las aberturas se aproxima a:

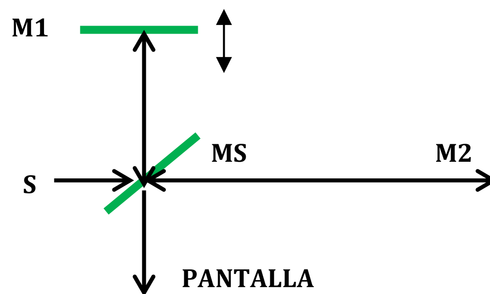
$$l \approx (n-1)t,$$

con t como el espesor de la película. Esta diferencia de recorrido debe ser igual al desplazamiento de la franja brillante central: 7λ. Entonces:

$$t = \frac{7\lambda}{n-1} = 6637 \text{ nm}.$$

El cálculo del espesor, en la aproximación de pantalla lejana, no involucra los parámetros D y d.

4.126 Interferómetro de Michelson I. Un instrumento de gran utilidad que involucra el fenómeno de interferencia de ondas es el interferómetro de Michelson. Luz monocromática proveniente de una fuente puntual alcanza un espejo semi-plateado **MS**. Este espejo divisor tiene una película delgada de plata que refleja únicamente la mitad de los rayos incidentes, de tal forma que una mitad de los rayos viajan hasta un espejo fijo **M2**, el cual los refleja de nuevo. La otra mitad de los rayos alcanzan un espejo móvil acoplado a un sistema de tornillo fino, en donde también se reflejan de nuevo. En el retorno, parte del rayo 1 pasa a través de **MS** y alcanza el ojo (o la pantalla), y parte del rayo 2 también alcanza el espejo **MS** y por consiguiente el ojo (o la pantalla). Si los dos caminos son idénticos, los dos rayos coherentes interfieren constructivamente observándose franjas brillantes.



Si el espejo ajustable se mueve una distancia de $\lambda/4$, el rayo 1 viajará una distancia adicional igual a $\lambda/2$. En este caso, los dos rayos interferirán destructivamente y franjas oscuras serán observadas. Si el espejo es nuevamente desplazado, aparecerán franjas brillantes (cuando la diferencia de camino sea igual a λ), y luego franjas oscuras, y así sucesivamente. Mediciones muy precisas hasta del orden de 0.1 μm pueden lograrse con este dispositivo en el límite del rango visible. Cuál es la longitud de onda de la luz incidente en un interferómetro de Michelson si 644 franjas brillantes son contadas cuando el espejo móvil se mueve 0.225 mm?

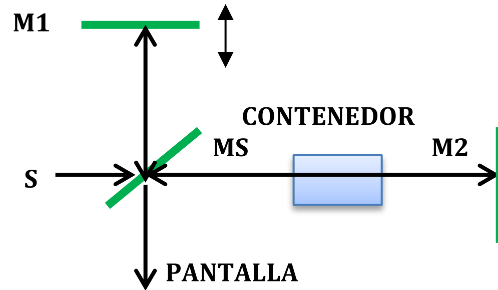
R. Si el desplazamiento del espejo móvil es de un cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$), éste producirá una clara diferencia entre franjas brillantes y oscuras consecutivas en la pantalla.

Existirán en total $644 \times 2 = 1288$ franjas alternadas o consecutivas en un desplazamiento de 0.225 mm. Por lo tanto:

$$0.225 \times 10^{-3} = 1288\left(\frac{\lambda}{4}\right); \quad \lambda = 699 \text{ nm}.$$

La distancia entre una franja brillante y una oscura consecutiva es 174.75 nm o ~0.175 μm.

4.127 Interferómetro de Michelson II. Uno de los haces de un interferómetro pasa a través de un pequeño contenedor de vidrio de 1.30 cm de longitud. Cuando el contenedor es llenado lentamente con un gas, un total de 236 franjas oscuras son contadas para ser movidas desde la línea de referencia. La longitud de onda de la luz utilizada es de 610 nm. Calcular el índice de refracción del gas, asumiendo que el interferómetro está en el vacío.



R. En este caso el desplazamiento del recorrido óptico es modificado por el gas contenido en el recipiente. En una sola trayectoria, el camino óptico varía como (i.e. el camino *adicional* que recorrería el haz de luz antes de reflejarse en **M2**):

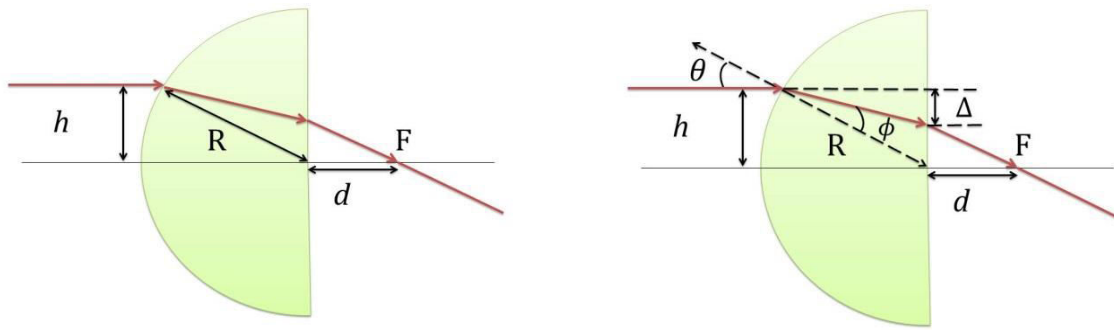
$$\ell = (n-1)\Delta X;$$

siendo $\Delta X = 1.30$ cm la longitud del contenedor, y n el índice de refracción del gas. Cuando aparece un patrón de interferencia de 236 franjas oscuras, debe cumplirse para el ajuste del espejo móvil **M1**, o en forma equivalente, para la diferencia de recorrido por haz:

$$\ell = d = 236 \times \left(\frac{\lambda}{2}\right) = 719.8 \text{ mm}.$$

Despejando para el índice de refracción: $n = 1.00554$.

4.128 Una lente plano-convexa de índice de refracción $n = 1.5$ y radio de curvatura de 12 cm se ilustra en la figura. Considere un rayo incidente paralelo al eje principal y a una altura h como se ilustra. Determine la distancia d desde la cara plana de la lente, en donde este rayo cruza el eje principal si (a) $h = 1$ cm, (b) $h = 6$ cm. (c) Que tan alejados entre sí están estos puntos focales?.



R. Utilizando la ley de Snell y criterios de geometría elemental, tendremos los siguientes resultados:

$$\sin\theta = n\sin\phi = \frac{h}{R},$$

$$\Delta = R\cos\theta\tan(\theta-\phi).$$

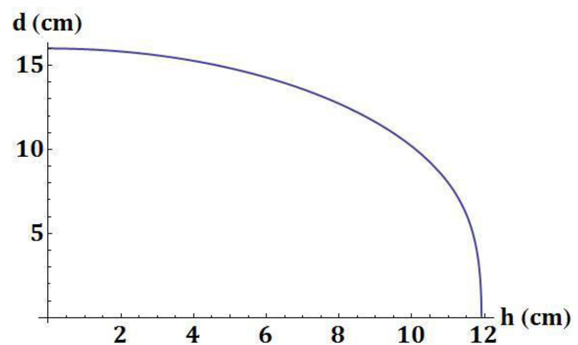
Sobre la cara plana de la lente,

$$n\sin(\theta-\phi) = \frac{h-\Delta}{\sqrt{d^2+(h-\Delta)^2}}.$$

Despejando la distancia al foco **F**, finalmente se obtiene:

$$d = (h-\Delta)\sqrt{\frac{1}{n^2\sin^2(\theta-\phi)}-1}\ .$$

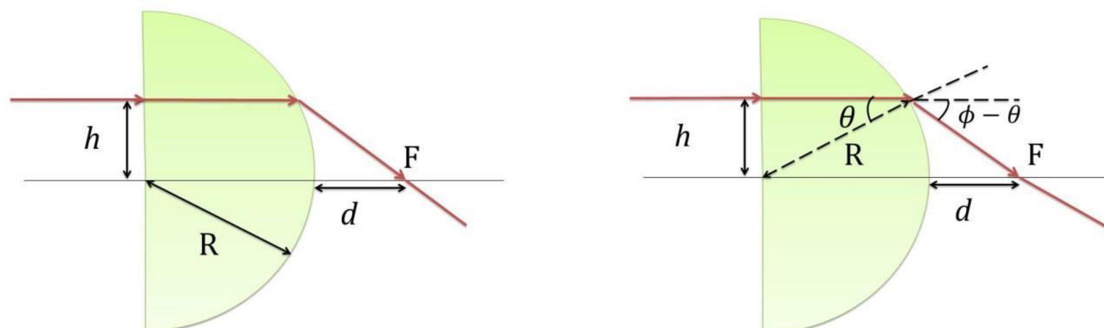
(a) Con $h = 1$ cm, $d = 15.955$ cm. (b) $h = 6$ cm, $d = 14.275$ cm. (c) $\delta F = 1.68$ cm. En el caso en el cual el rayo incidente se propague a lo largo del eje óptico de la lente (i.e. $h \sim 0$), la distancia focal desde la superficie plana se obtiene desde la expansión en series de potencia de la función *d:*



$$d \approx \frac{R}{n(n-1)} = 16 \text{ cm}.$$

La dependencia de la distancia focal con la altura h del rayo con respecto al eje de lente es ilustrada en la figura adjunta. Se presenta *aberración esférica* cuando los rayos provenientes de un objeto no convergen un solo punto focal, cuya referencia se toma con respecto al rayo que pasa por el centro de la lente.

4.129 Considere una variante del ejercicio ***4.128***, para el caso en el cual la luz incide paraxialmente sobre la superficie plana de la lente plano-convexa. Hallar la distancia focal d y aproximar la expresión resultante para el caso en que $h \sim 0$.



R. Utilizando la ley de Snell y criterios de geometría elemental, tendremos los siguientes resultados:

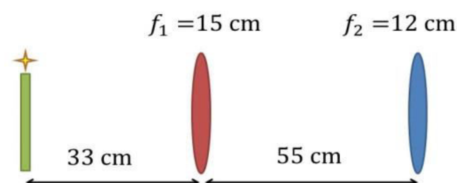
$$\sin\theta = \frac{h}{R}, \quad \sin\phi = n\sin\theta.$$

La distancia focal se determina desde la expresión:

$$d = \frac{h}{\tan(\phi - \theta)} - R(1 - \cos\theta).$$

Cuando el haz de luz incide a lo largo del eje óptico, ($h\sim 0$), (cfr. ejercicio ***4.95***) $d \approx R/(n-1)$.

4.130 Una vela encendida es situada a 33 cm en frente de una lente convergente de $f_1 = 15$ cm de distancia focal, la cual está ubicada a 55 cm de otra lente convergente de distancia focal $f_2 = 12$ cm. Calcular la posición y el tamaño relativo de la imagen resultante.



R. La imagen producida por la primera lente estará localizada a 27.5 cm a la derecha de la misma. Esta imagen es a su vez el objeto de la segunda lente localizado a una distancia igual a (55-27.5) cm =27.5 cm y producirá otra imagen de la vela localizada a 21.3 cm a la derecha de la segunda lente. Finalmente, la imagen resultante estará a una distancia de 109. 3 cm desde la vela. El aumento de la primera lente se calcula como:

$$M_1 = -\frac{27.5 \text{ cm}}{33 \text{ cm}} = -0.833,$$

mientras que la para el segundo lente:

$$M_2 = -\frac{21.3 \text{ cm}}{27.5 \text{ cm}} = -0.775.$$

La magnificación total es el producto de los dos aumentos:

$$M_T = M_1 M_2 = +0.65$$

y la imagen resultante es disminuida y no invertida.

4.131 En un experimento de Young de dos ranuras, una pieza de vidrio, con índice de refracción n y espesor L, está colocada enfrente de la ranura superior. (a) Deduzca una expresión para la intensidad promedio de la luz $\langle I \rangle$ en puntos sobre una pantalla como función de n, L y θ. En este caso, θ es el ángulo usual medido desde el centro de las dos ranuras. (b) Deducir una expresión para los valores de θ que determinan la posición de los máximos de la configuración de interferencia. (Cfr. Ej. ***4.125***)

R. (a) La diferencia de recorrido óptico entre dos haces de luz que emergen desde las ranuras es $\Delta r' = \Delta r + (n-1)L$, en donde Δr es la diferencia de recorrido *sin* el obstáculo de vidrio. La diferencia de fase se calcula como: $\delta = k\Delta r' = k\Delta r + k(n-1)L$ ó $\delta = kd \sin\theta + k(n-1)L$, en donde d es la distancia entre rendijas. La intensidad en un punto de la pantalla se define como: $\langle I \rangle = I_0 \cos^2(\delta/2)$. (b) La posición de los máximos de interferencia están definidos por: $\delta = 2m\pi, \quad m = 0,1,2, \dots$

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda - (n-1)L}{d}.$$

4.132 Demuestre que para un patrón de Fraunhofer de doble rendija, si $a = mb$, (m entero) el número de franjas brillantes (o parte de ellas) dentro del máximo central de difracción es igual a $2m$. (Cfr. Ej. ***4.77***.)

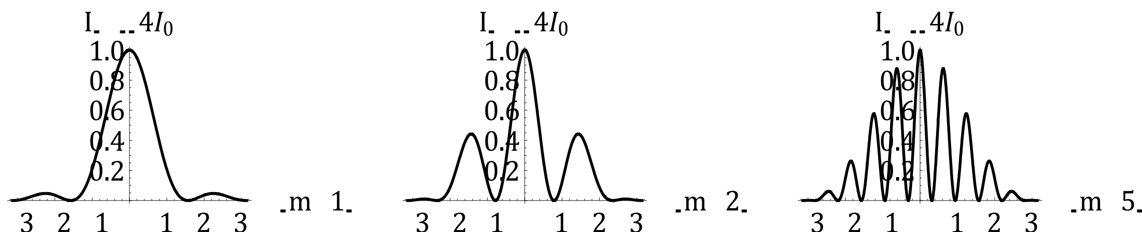
R. La expresión para la función de distribución de la intensidad producido por un sistema de N rendijas idénticas, largas, angostas (de ancho b), paralelas y separadas entre sus centros una distancia a, se puede escribir como (Óptica, E. Hecht, A. Zajac, Cap. 10. Ec. **10.31**):

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2;$$

en donde $\beta = \pi b \sin\theta/\lambda$ y $\alpha = \pi a \sin\theta/\lambda$. Según la condición $\alpha = m\beta$, (con los mínimos de difracción de primer orden localizados en $\beta = \pm\pi$), los máximos principales ocurren cuando:

$$\frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha} = N,$$

es decir, cuando $\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots = \pm m'\pi$. El orden de los máximos de interferencia corresponden al factor m (sin considerar $m' = 0$). A cada lado del máximo de difracción tendremos m franjas de interferencia constructiva, contabilizando en total $2m$ franjas brillantes en el intervalo $\beta = \pm\pi$.



Patrón de intensidad de un sistema de doble rendija con diferentes relaciones $m = a/b$. *Se observa la aparición franjas brillantes (o máximos de intensidad) dentro del máximo central de difracción en una proporción igual a 2m, sin considerar el máximo central.*

4.133 Un haz de luz monocromática con $\lambda = 532.8$ nm incide de manera normal en una red de difracción con $a = 2.16\,\mu$m. a) Cuáles son las posiciones angulares de los máximos de interferencia de primer y segundo orden?. b) Si con este haz se iluminan 758 rendijas de la red, cuál es el semi-ancho angular de cada uno de estos máximos?.

R. a) Utilizando la ecuación de la red,

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right) = 14.28°,\ \ \theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\lambda}{a}\right) = 29.56°.$$

b) Semi-ancho angular:

$$(\Delta\theta)_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{Na\cos\theta_m} = 3.36 \times 10^{-4}\ \mathrm{DEG}(m = 1),\quad 3.74 \times 10^{-4}\ \mathrm{DEG}(m = 2).$$

4.134 Supongamos que estamos en posesión de dos redes de difracción A y B. El espaciamiento entre las rendijas de la red A es 1.86 μm, pero no se conoce el espaciamiento entre las rendijas de la red B. Una fuente monocromática produce una línea de primer orden a θ = 19.4° cuando la luz incide normalmente A, y la misma fuente produce una línea de primer orden a 22.1° al incidir esta misma luz en B. Cuál es el espaciamiento de las rendijas para la red B?.

R. Para un máximo de primer orden en la red A, debe cumplirse: $d_A \sin\theta_A = \lambda$. Para la red B: $d_B \sin\theta_B = \lambda$. Dividiendo estas dos expresiones:

$$d_B = d_A \frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B} = 1.64\ \mu\mathrm{m}.$$

4.135 Una placa de vidrio de $l = 3$ mm de espesor y con un índice de refracción $n = 1.5$, está colocada entre una fuente puntual de luz de 450 nm de longitud de onda en el vacío y una

pantalla. La distancia entre la fuente y la pantalla es $D = 3$ cm. Calcular el número de longitudes de onda entre la fuente y la pantalla.

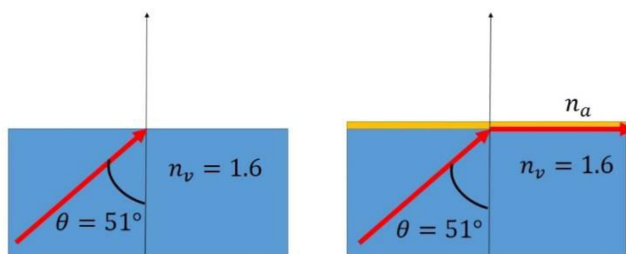
R. El número de longitudes de onda en una placa de vidrio de espesor l es: $N_p = nl/\lambda_0$, en donde λ_0/n es la longitud de onda en el vidrio. La luz se propagará una distancia $D - l$ en el vacío, y el número de longitudes de onda en esta región es:

$$N_v = \frac{D - l}{\lambda_0}.$$

El número total de longitudes de onda contenidas entre la fuente y la pantalla finalmente se obtiene sumando estas dos últimas expresiones:

$$N_T = \frac{D + (n-1)l}{\lambda_0} = 70 \times 10^3.$$

4.136 Un rayo de luz se propaga en un bloque de vidrio ($n = 1.6$) incide sobre la superficie superior con un ángulo de 51° con respecto a la normal. Si se coloca una capa de aceite sobre la superficie superior de vidrio, el rayo se reflejará totalmente. Cuál es el máximo índice de refracción del aceite?.

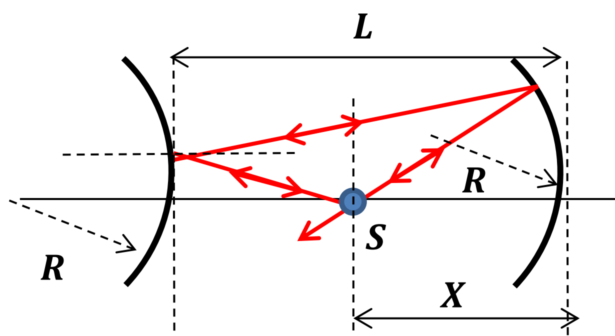


R. En el caso de la configuración vidrio-aceite, el ángulo crítico corresponde al ángulo de incidencia: 51°. El índice de refracción de la película de aceite se obtiene desde:

$$n_v \sin\theta = n_a = 1.24.$$

4.137 Un espejo convexo y uno cóncavo están colocados sobre el mismo eje óptico, separados una distancia $L = 0.600$ m. El radio de curvatura de cada espejo tiene una magnitud $R = 0.360$ m. Una fuente de luz S está colocada a una distancia X del espejo cóncavo, como se ilustra en la figura. (a) Qué distancia X tendrá como resultado que los rayos provenientes de la fuente regresen a ésta después de reflejarse primero en el espejo convexo y luego en el cóncavo?. (b) Repetir el apartado (a), considerando ahora que los rayos se reflejan primero en el espejo cóncavo y luego en el espejo convexo.

R. La construcción geométrica de los rayos en el caso (a) se ilustra en la figura adjunta.



(a) La imagen formada por el espejo ***convexo*** de un objeto localizado a una distancia $L - X$ se obtiene desde la ecuación:

$$\frac{1}{L - X} + \frac{1}{S_I} = -\frac{2}{R},$$

es decir:

$$S_I = -\frac{R(L - X)}{2(L - X) + R},$$

hacia la izquierda del vértice del espejo convexo sobre el eje óptico. Esta imagen a su vez actúa como objeto del espejo cóncavo localizado a una distancia $L + S_I$ y el cual formaría una imagen exactamente en el punto donde se ubica la fuente:

$$\frac{1}{L + |S_I|} + \frac{1}{X} = +\frac{2}{R}.$$

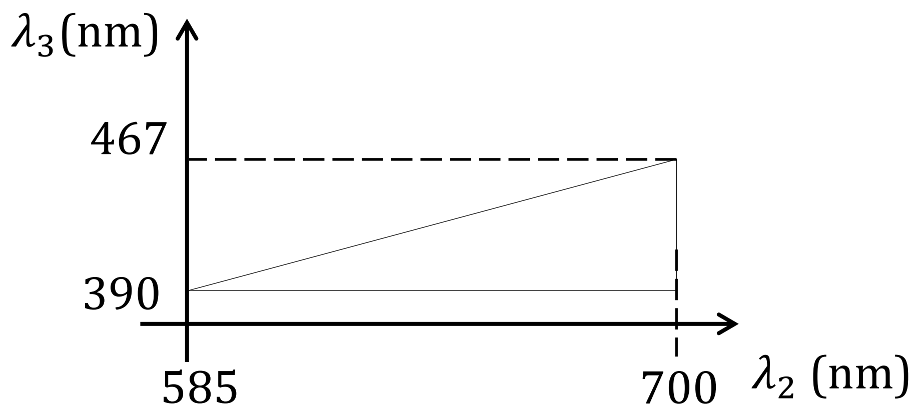
Resolviendo para *X:*

$$X = \frac{1}{2}\left(L + R \pm \sqrt{(L - R)(L + R)}\right).$$

Las soluciones matemáticas corresponden a $X = 0.24$ m (signo negativo) y $X = 0.72$ m (signo positivo). Este último resultado es omitido dado que la fuente no se localizaría entre los espejos. (b) Trazamos los rayos del caso (a) en sentido opuesto. En un procedimiento similar, se obtiene nuevamente $X = 0.24$ m.

4.138 Demostrar que los espectros de primer y segundo orden producidos por una rejilla de difracción cuando sobre ésta incide luz blanca, siempre se superponen. Cuáles longitudes de onda se superponen, exactamente?.

R. La luz blanca contiene un rango definido de longitudes de onda entre 390 nm y 700 nm en el visible. Si el parámetro de red de la rejilla es d, entonces para cierta longitud de onda, tendremos que los espectros de segundo y tercer orden se superponen si: $d \sin\theta = 2\lambda_2 = 3\lambda_3$; es decir, si las relaciones entre las longitudes de onda obedece: $\lambda_3/\lambda_2 = 2/3$.



La región sombreada en la gráfica superior indica los intervalos de longitudes de onda que pueden superponerse para la luz blanca en el rango visible. Máximos de segundo orden desde 585 nm a 700 nm se superponen a máximos de tercer orden desde 390 nm a 467 nm.

4.139 Demostrar que en cualquier sistema centrado, las distancias focales f y f' se relacionan mediante la ecuación

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n},$$

en donde n es el índice de refracción del espacio objeto y n', el del espacio imagen.

R. Un sistema óptico recibe el nombre de centrado si éste es formado por varias superficies esféricas o planas, que separan medios de diferentes índices de refracción y cuyos centros están situados sobre el mismo eje, normal a todas ellas. Analizaremos el caso particular de una lente esférica de radio R. Si un objeto se localiza en el foco del espacio con índice de n, su imagen se formará en el infinito en el espacio con índice n', y la ecuación que relaciona estas dos cantidades es (superficie cóncava según la convención de signos):

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R},$$

con R como el radio de curvatura del sistema centrado. Si la imagen se forma en el segundo medio con índice n', los rayos del objeto provienen del infinito, de forma tal que (superficie convexa):

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n' - n}{R}.$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos:

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}.$$

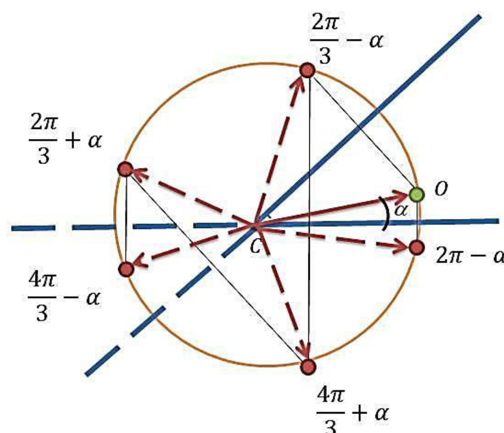
4.140 Dos espejos planos son instalados formando un ángulo de 60° ($\varphi = \pi/3$). Si un objeto (puntual) se coloca entre los espejos, calcular el número de imágenes formadas por este sistema.

R. La posición de un objeto puntual puede determinarse mediante el ángulo α que el radio vector CO forma con la superficie del espejo horizontal. Las posiciones de las imágenes están dadas por la serie:

$$2\varphi - \alpha;\ \ 2\varphi + \alpha;\ \ 4\varphi - \alpha;\ \ 4\varphi + \alpha;\ \ 6\varphi - \alpha;\ \ 6\varphi + \alpha \ldots$$

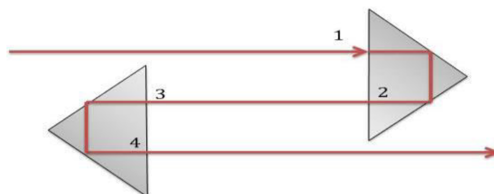
el cual se define en el caso particular como:

$$\frac{2\pi}{3} - \alpha;\ \ \frac{2\pi}{3} + \alpha;\ \ \frac{4\pi}{3} - \alpha;\ \ \frac{4\pi}{3} + \alpha;\ \ 2\pi - \alpha;\ \ \overbrace{\underbrace{2\pi + \alpha}}^{\alpha}.$$



Las reflexiones del objeto y las imágenes especulares son ilustradas en la figura adjunta. Todas las imágenes se circunscriben en un círculo con radio CO, siendo C el vértice de unión de los dos espejos. La serie se interrumpe cuando la posición de la imagen coincida con el objeto que la produce. En general, si el ángulo entre los espejos es $\varphi = 2\pi/m$, con m impar, el número de imágenes es igual a m. Si m es par, el número de imágenes será igual a $m-1$. El método expuesto funciona también cuando m no es entero.

4.141 Calcular el porcentaje de flujo luminoso que se pierde en la reflexión en unos prismas gemelos (doble Porro). El índice de refracción de los prismas es $n = 1.5$, y el esquema se representa en la figura.



R. Consideremos que la intensidad del haz de luz incidente es I_0. El haz transmitido en la primera superficie tiene una intensidad TI_0, en donde T es el coeficiente trasmisión en la superficie de separación del aire y el vidrio. El haz experimenta reflexión total interna dentro del prisma, así que en la superficie 2 el haz de luz emerge con una intensidad T^2I_0. Al completar el recorrido sobre el segundo gemelo, la intensidad con que el haz emerge será:

$$I_T = T^4 I_0.$$

Utilizando la ecuación de Fresnel, la intensidad de la luz reflejada es:

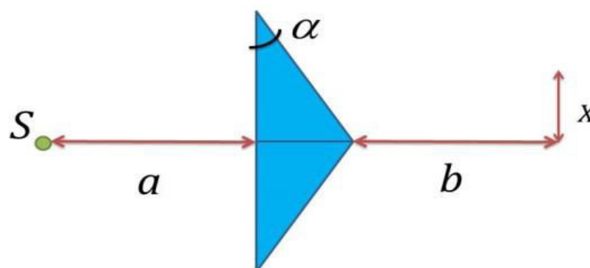
$$I_R = I_0(1 - T^4).$$

El coeficiente de transmisión para incidencia normal entre dos medios, uno con índice 1 (aire) y el otro con índice n es:

$$T = \frac{4n}{(n+1)^2} = 0.96.$$

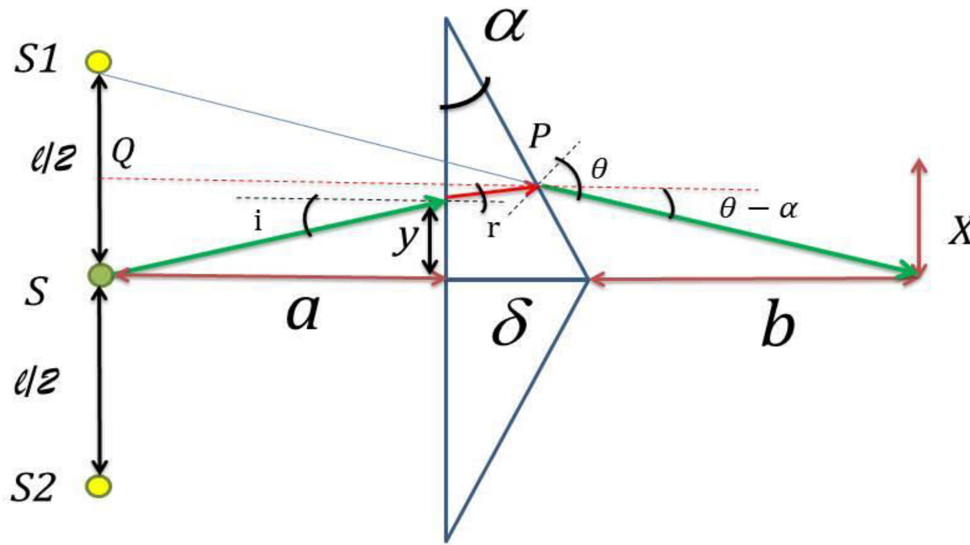
La intensidad de luz que se refleja es $0.15 I_0$.

4.142 Biprisma de Fresnel*. El prisma doble de Fresnel o biprisma consiste en dos prismas unidos en las bases, como se ilustra en la figura. Un frente de onda alcanza ambos prismas, y la parte superior del frente de onda se refracta hacia abajo, mientras que la parte inferior se refracta hacia arriba. En la región de superposición ocurre la interferencia. Hallar la distancia X desde el centro del espectro de interferencia hasta la m-ésima franja brillante en el experimento con un biprisma cuyo índice de refracción es n, la longitud de onda incidente igual a λ, y el ángulo del dispositivo α.



R. En la aproximación usual de prisma delgado, i.e. el ángulo α se considera pequeño, y la relación entre el ángulo de incidencia y el de refracción es ($a \gg l/2$):

$$i \approx nr.$$



De la geometría ilustrada y aplicando la ley de Snell en el haz de salida:

$$n \sin(\alpha - r) = \sin\theta\,, \qquad n(\alpha - r) \approx \theta.$$

$$\tan i = \frac{y}{a}; \quad \sin i = n \sin r\,; \qquad i \approx nr.$$

$$\tan(\theta - \alpha) \approx \frac{\left(\frac{l}{2} - y\right)}{(a + \delta)} \approx \frac{l}{2a} - \frac{y}{a}\,; \qquad a \gg \delta;$$

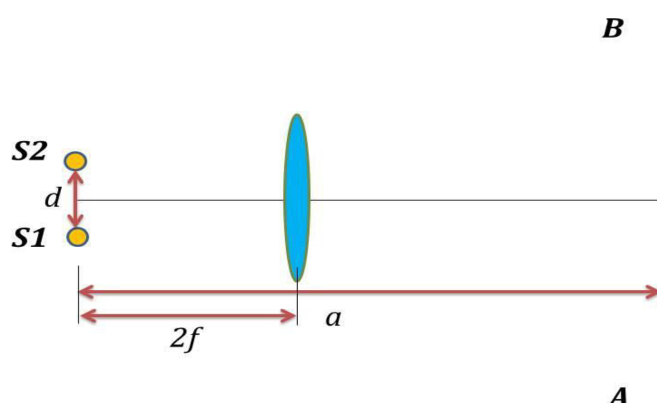
siendo δ el espesor del prisma (ilustrada en una representación fuera de escala en la figura anterior). De la última expresión tendremos:

$$\theta - \alpha \approx n\alpha - nr - \alpha \approx \frac{l}{2a} - i.$$

Finalmente: $l = 2a\alpha(n-1)$. La distancia entre fuentes virtuales es proporcional al doble del ángulo del biprisma de Fresnel, a la distancia entre la fuente y el biprisma, y al índice de refracción del mismo, reducido en una unidad. Ahora el problema puede reducirse al problema de dos fuentes puntuales cuyas ondas generadas interfieren constructivamente en la pantalla localizada a una distancia $a + b$. La m-ésima franja brillante, con respecto a la línea horizontal que conecta el eje óptico del prisma y la fuente real, estará ubicada en:

$$X_m = m\lambda \frac{(a+b)}{l} = m\lambda \frac{(a+b)}{2a\alpha(n-1)}.$$

4.143 De dos fuentes coherentes de luz $S1$ y $S2$ se obtiene un sistema de franjas de interferencia sobre una pantalla AB alejada de las fuentes una distancia $a = 2$ m. Calcular la variación del ancho de las franjas de interferencia, si entre las fuentes y la pantalla se sitúa una convergente de distancia focal $f = 25$ cm. Considerar dos casos 1) la distancia de la lente a las fuentes es $2f$; 2) las fuentes $S1$ y $S2$ se hallan en el plano focal de la lente.



R. Las imágenes de las fuentes se formarán a una distancia $2f$ a la derecha de la lente con un factor de magnificación igual a la unidad. Las fuentes *virtuales* estarán separadas una distancia $a - 4f$ desde la pantalla. La distancia entre franjas de interferencia consecutivas en este caso es:

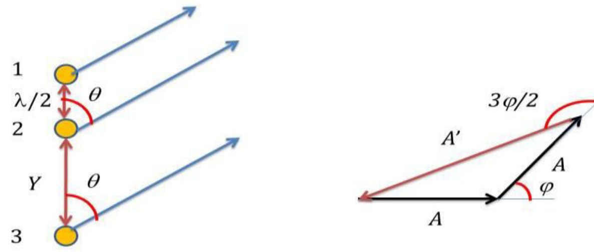
$$\Delta y' = \lambda \frac{(a - 4f)}{d}.$$

Si la lente es removida, la distancia entre franjas de interferencia consecutivas es: $\Delta y = \lambda a/d$. El ancho de las franjas disminuye en un factor

$$\frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{(a - 4f)}{a} = 0.50$$

El tamaño de las franjas disminuye a la mitad.

4.144 Tres fuentes en fase están situadas a lo largo de una recta como se muestra en la figura. La distancia entre las fuentes 1 y 2 es $\lambda/2$, y entre las fuentes 2 y 3, una vez y media mayor. Las amplitudes de oscilación 1 y 2 son iguales. Cuál debe ser la amplitud del radiador 3 para que en el diagrama direccional del sistema existan mínimos de intensidad cero?. Hallar la dirección de estos mínimos.



R. Del enunciado se deduce $Y = 3\lambda/4$. La diferencia de fase entre las fuentes 1 y 2 es:

$$\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r_{12} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\sin\theta = \pi\sin\theta = \varphi;$$

y entre diferencia de fase entre las fuentes 2 y 3:

$$\varphi_{23} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r_{23} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4}\sin\theta = \frac{3}{2}\pi\sin\theta = \frac{3}{2}\varphi.$$

Utilizando el teorema del coseno en el diagrama fasorial adjunto:

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 - 2A^2\cos(\pi - \varphi)} = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ahora calcularemos el valor de la diferencia de fase utilizando la representación compleja:

$$Ae^{-i\varphi_1} + Ae^{-i\varphi_2} + A'e^{-i\varphi_3} = 0,$$

ó

$$1 + e^{-i\varphi_{12}} + \left(\frac{A'}{A}\right)e^{-i\varphi_{13}} = 0,$$

en donde $\varphi_{13} = 5\varphi/2$. Simplificando:

$$1 + e^{-i\varphi} + 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-5i\varphi/2} = 0.$$

Igualando las partes imaginarias, obtenemos:

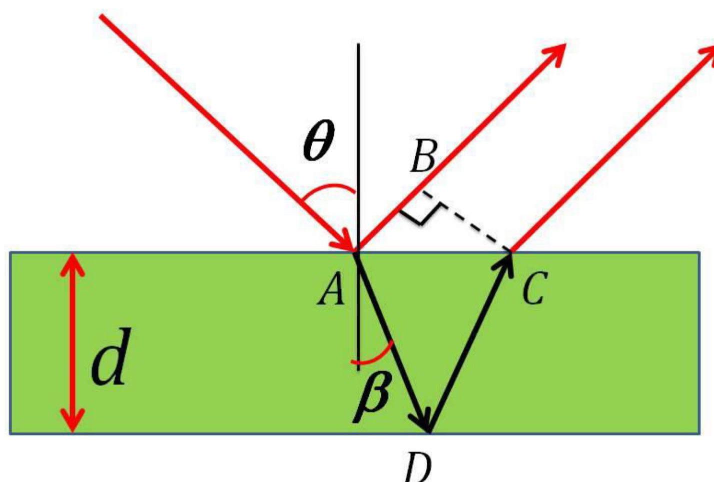
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\varphi}{2}\right) = 0,$$

cuya solución apropiada es

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

La amplitud de oscilación de la tercera fuente es $A' = \sqrt{2}A$ y el ángulo polar en donde se localizaría un mínimo de intensidad igual a cero es 30°.

4.145 Una burbuja de jabón aparece de color verde claro por efecto de la luz reflejada. Los haces de luz entran en el ojo bajo un ángulo de $\theta = 30°$ (con respecto a la normal). Calcular el espesor de la burbuja. ¿Qué color se reflejará en la burbuja si se observa bajo un ángulo de 0°? El índice de refracción de la burbuja es de $n = 1{,}33$ y la longitud de onda de la luz verde es de 5000 A.



R. La diferencia de recorrido Δ entre los haces reflejados $\overline{AB}$ y $\overline{AD} + \overline{DC}$ es:

$$\Delta = 2d\sqrt{(n^2 - \sin^2\theta)},$$

el cual aparece de obtener la diferencia entre las distancias

$$\overline{AD} + \overline{DC} = \frac{2nd}{\cos\beta}$$

y

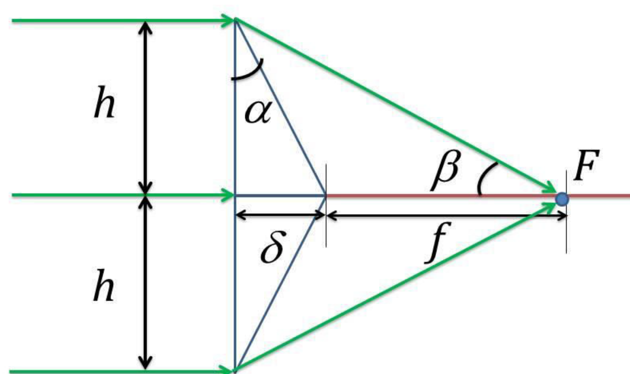
$$\overline{AB} = 2d\tan\beta\sin\theta.$$

La relación entre los ángulos θ y β se obtiene desde la ley de Snell: $\sin\theta = n\sin\beta$. El cambio de fase asociado al paso del haz de luz desde al aire a la burbuja y de nuevo al aire es **π**. Según la tabla 4.2, se presentará interferencia constructiva cuando la diferencia de recorrido toma valores $\lambda/2$; $3\lambda/2$; $5\lambda/2$ …El mínimo espesor de la burbuja que presenta interferencia constructiva es:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{(n^2 - \sin^2\theta)}}.$$

Numéricamente: $d = 1014\,A$. Si la incidencia normal: $\lambda = 4nd = 5395\,A$. (Verde-Amarillo).

4.146 Obtener una expresión para la distancia focal máxima del biprisma de Fresnel, ejercicio **(*4.142*).**



R. La distancia focal máxima se obtiene cuando rayos paraxiales inciden sobre el borde del dispositivo. De la geometría:

$$f = h(\text{ctan}\,\beta - \tan\alpha).$$

En términos del índice de refracción n y con referencia a la construcción geométrica del ejercicio ***4.142***, obtenemos una relación entre los ángulos del biprisma α y el ángulo β.

$$n\cos\alpha = \cos(\alpha - \beta).$$

4.147 *Rejilla de Difracción.* Una línea de primer orden de luz de 589 nm que incide sobre una rejilla de difracción se observa a un ángulo de 15.5°. Cuál es la distancia entre aberturas de la rejilla?. Cuál es el ángulo de la línea de tercer orden?.
R. La distancia entre aberturas consecutivas d puede calcularse desde la ecuación:

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} = 2204 \text{ nm}.$$

Para la línea de tercer orden:

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{3\lambda}{d}\right) = 53.3°.$$

4.148 Un rayo láser de He-Ne de luz roja ($\lambda = 630$ nm) pasa a través de una abertura de 1 cm y apunta hacia la Luna, es cual está alejada aproximadamente a 380,000 km de la Tierra. Estimar el ancho del haz de luz cuando éste alcanza la Luna.
R. En este caso es suficiente con calcular el ancho de difracción de Fraunhofer ($2\Delta y$) del haz de luz cuando éste alcanza la Luna:

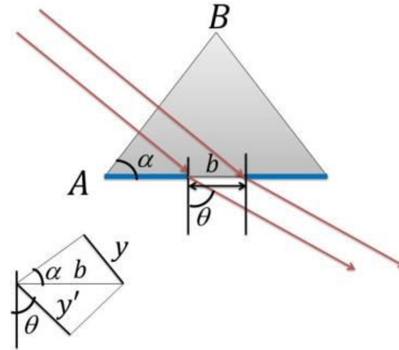
$$2\Delta y = \frac{2D\lambda}{a} \sim 47.8 \text{ km}.$$

4.149 Cuál es el mayor orden espectral que puede observarse si una rejilla de difracción con 6000 líneas por centímetro es iluminada con luz láser de 633 nm? Asumir incidencia normal.

R. El mayor orden espectral corresponde a la condición: $\sin\theta \sim 1$, en donde θ es el ángulo asociado a la línea de interferencia constructiva de orden m. En este caso:

$$\frac{m\lambda}{d} \sim 1; \quad m \sim \frac{d}{\lambda} \sim 2; \quad d = \frac{1}{6000} = 1.66\ \mu\text{m}.$$

4.150 Sobre una rendija de ancho b se ha colocado un prisma de vidrio de índice de refracción n y ángulo α. Sobre la cara AB del prisma incide normalmente una onda plana monocromática. Hallar las direcciones de los máximos y mínimos en el espectro de difracción de Fraunhofer.

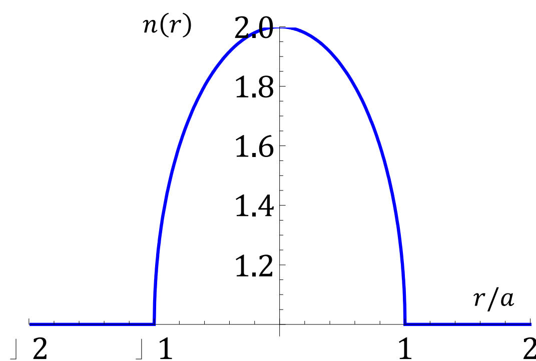


R. Cfr. Ej. (***4.70***) La diferencia de recorrido óptico en el interior del prisma es: $y = nb\sin\alpha$. Dos rayos que emergen del prisma tendrán una diferencia de recorrido igual a $y' = b\sin\theta$. La diferencia neta de recorrido cuando el haz ingresa perpendicular a la cara AB y emerge desde la abertura de ancho b es: $\Delta y = y' - y = b(\sin\theta - n\sin\alpha)$. Se presentarán mínimos de difracción cuando

$$b(\sin\theta - n\sin\alpha) = m\lambda; \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y el máximo de difracción de orden cero está localizado en: $\sin\theta = n\sin\alpha$.

4.151 La figura ilustra la diferencia entre el perfil del índice de refracción de una denominada *fibra de índice de paso* contra el perfil del índice de refracción de una denominada *fibra de índice graduado.* Realizar un análisis acerca de la trayectoria seguida por un haz de luz que ingresa a la fibra.



R. El índice de refracción cambia con la distancia desde el centro de la fibra de radio a. En el centro toma su máximo valor $n_n = 2$ mientras que en la superficie toma el valor del revestimiento $n_r = 1$. Matemáticamente:

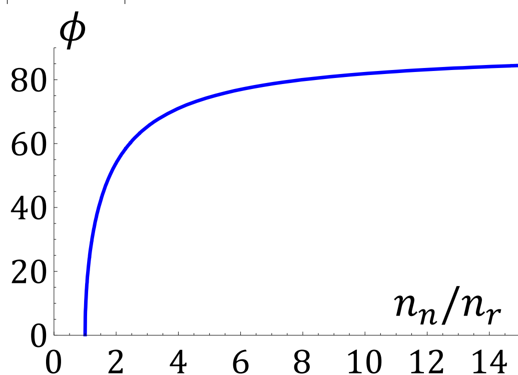
$$n(r) = n_r + (n_n - n_r)\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Cuando el haz de luz entra a la fibra en dirección paralela al eje de la misma, y si el índice de refracción es inhomogéneo, éste se desviará con respecto a la dirección original según la ecuación: $n(r)\sin\theta = C$, en donde θ es el ángulo del haz con respecto al eje normal a la dirección de propagación (el cual podemos denotar como z). La desviación lateral está definida por:

$$\frac{dr}{dz} = \sqrt{\left(\frac{n(r)}{C}\right)^2 - 1}.$$

La fibra óptica maximiza su eficiencia cuando la luz que se propaga dentro de la fibra experimenta reflexión total interna en la superficie fibra-revestimiento. En ese caso, $C = n_r$ y el ángulo con respecto al eje de propagación del haz está definido por:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right).$$

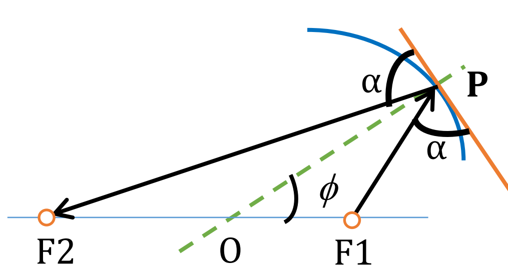


Integrando sobre la variable r, se obtiene el ángulo de desviación ϕ con respecto al eje z. Este ángulo tiende a 90 grados cuando la relación entre el índice de refracción de la fibra y el revestimiento aumenta en una fibra de radio a.

4.152 La forma de un espejo elíptico se describe mediante la curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Con el semieje mayor a y el semieje menor b. Los focos de esta elipse están ubicados en los puntos $(\pm c, 0)$, con $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$. Demostrar que cualquier rayo de luz en el plano XY, que pasa por un foco, se refleja por el otro.



R. En este caso es suficiente con demostrar que si el ángulo de incidencia con respecto a una línea tangente en **P** (contenido en la órbita elíptica) de un rayo que emerge desde el foco **F1**, y el ángulo del rayo reflejado en el mismo punto con respecto a la línea tangente en **P**, son iguales, el rayo reflejado pasará por el segundo foco **F2**.

El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ es parametrizado a través del ángulo ϕ por $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}} = (a\cos\phi, b\sin\phi)$. El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{F1P}} = \vec{\boldsymbol{R}}$ se obtiene por:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - c\widehat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{X}} = (a\cos\phi - c, b\sin\phi),$$

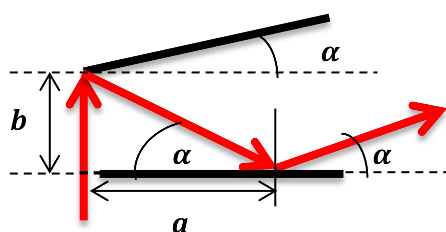
mientras que el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{PF2}} = \vec{\boldsymbol{R}}' = \vec{\boldsymbol{r}} + c\widehat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{X}} = (a\cos\phi + c, b\sin\phi)$. El vector asociado a la línea tangente en **P** se calcula derivando el vector $\vec{\boldsymbol{r}}$: $\vec{\boldsymbol{v}} = (-a\sin\phi, b\cos\phi)$. Obsérvese que $\vec{\boldsymbol{v}}$

es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{r}}$ *únicamente* para ciertos valores de ϕ. Si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, entonces la propiedad del producto escalar conduce a: $(v = |\vec{\boldsymbol{v}}|)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{Rv} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}'\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{R'v}.$$

De ésta última expresión: $\left[R'\left(\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)\right]^2 - \left[R\left(\vec{\boldsymbol{R}}'\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right)\right]^2 = 0.$ En desarrollando el álgebra en la última ecuación, se obtiene: $4ab^2c(c^2+b^2-a^2)\cos\phi\sin^2\phi = 0$, ó $\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$, el cual corresponde en efecto a la ecuación del foco de la elipse.

4.153 Un haz de luz incide paralelamente al eje vertical y se refleja en un espejo que forma un ángulo α con respecto a la horizontal y luego se refleja en otro espejo antes de salir al exterior (ver figura). Calcular la longitud mínima a que debe tener el espejo si la distancia más corta entre ellos es b.



R. La reflexión única en ambos espejos es posible si el ángulo de salida del haz es menor o igual a α. De la geometría simple:

$$\tan\alpha = \frac{b}{a};$$

la longitud mínima del espejo horizontal se puede estimar como: $a = b\cot\alpha$. Es fácil ver que $b = a$ si $\alpha = 45^0$.

4.154 Los radios de curvatura de una lente delgada doblemente convexa (indice de refracción n tienen una relación de k:1 ($k > 1$). Escribir una expresión para R, el menor de los radios, en términos de la distancia focal f.

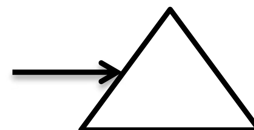
R. Utilizamos la ecuación de los lentes convexos:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-|R_2|}\right).$$

Si $R_1 = R$ es el menor de los radios, entonces $R_2 = kR$ y la ecuación para el foco se reduce a:

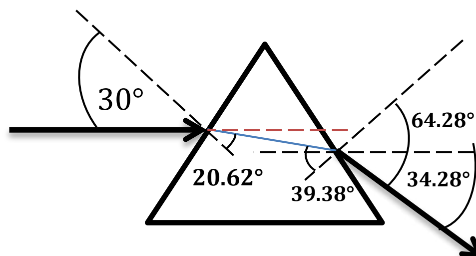
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{kR}\right) = \frac{(n-1)(k+1)}{kR}; \qquad \boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{(n-1)(k+1)}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{f}.$$

4.155 Un rayo de luz de una longitud de onda particular incide en un prisma triangular equilátero con índice de refracción 1.42. El rayo es paralelo a la base del prisma cuando se aproxima a éste. el rayo entra al prisma en el punto medio de uno de sus lados, como se muestra en la figura. Cuál es la dirección del rayo cuando sale del prisma triangular?.



R. El ángulo en los vértices de un triángulo equilátero es 60°. El ángulo de incidencia con respecto a la normal de la superficie del triángulo es 30°. Cuando el rayo entra al prisma, se refracta a un ángulo de 20.62° (ley de Snell). El ángulo de incidencia con respecto a la

horizontal sobre la segunda superficie del prisma es 9.38° y 39.38° con respecto a la normal. Aplicando nuevamente la ley de Snell, obtenemos el ángulo de salida con respecto a la horizontal: **34.28° (Ver figura, (no a escala)).**



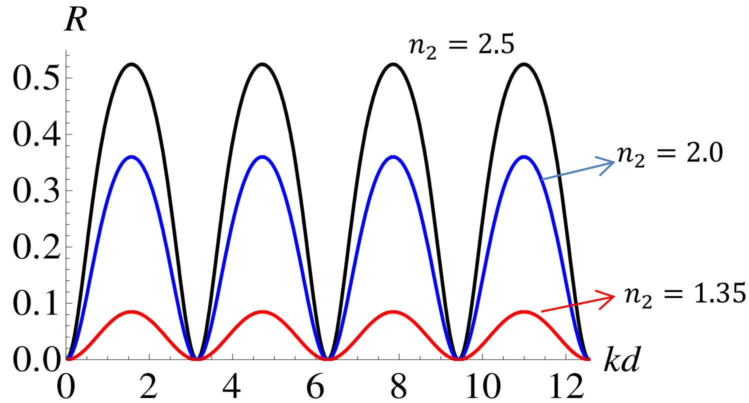
4.156* Obtener el espesor mínimo de una de una película delgada de jabón con índice de refracción 1.35 inmersa en aire, que refleja predominantemente luz roja con 682 nm de longitud de onda.

R. El coeficiente de reflexión generalizado asociado a una onda incidente en forma normal desde un medio con índice refracción n_1 hacia una película delgada con índice n_2 y de espesor d es:

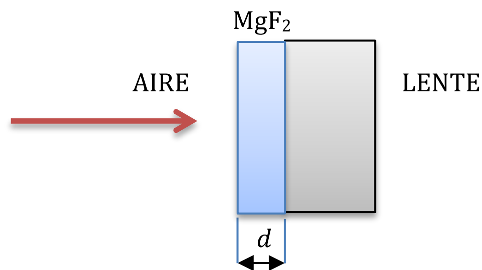
$$\check{r} = \frac{\rho_1 + \rho_2 e^{-2ikd}}{1 + \rho_1 \rho_2 e^{-2ikd}}, \qquad \rho_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -\rho_2;$$

en donde k es el vector de onda en la película: $k = 2\pi f n_2/c$. Esta fórmula es obtenida desde las condiciones de frontera de los campos electromagnéticos aplicadas sobre cada superficie. Los máximos de reflexión ocurren cuando el factor $\delta = kd = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$, mientras que los mínimos de reflectividad suceden en $\delta = kd = \pi, 2\pi, 3\pi$, en ambos casos con $n_2 > n_1$. El espesor mínimo de la película para el cual aparece el efecto de fuerte reflejo (o interferencia constructiva en la reflexión) es:

$$d_{min} = \frac{c}{4fn_2} = \frac{\lambda_1}{4n_2}.$$



Los máximos y mínimos de reflectividad $R = |\check{r}|^2$ están localizados para los mismos valores de la diferencia $\delta = kd$ y no dependen de n_2. El cálculo está realizado para $n_1 = 1$. Para el caso particular, $d_{min} = 126.3$ nm.



R. La fórmula del problema 4.156 debe modificarse para un sistema de tres (3) medios:

$$\rho_1 = \frac{n_{aire} - n_c}{n_{aire} + n_c}; \quad \rho_2 = \frac{n_c - n_v}{n_c + n_v}.$$

4.157 Lentes de alta calidad están recubiertos para evitar reflexiones. Una capa de Fluoruro de Magnesio (MgF_2) con índice de refracción $n_c = 1.38$ se aplica sobre una lente de vidrio con índice $n_v = 1.51$. Cuál es el espesor mínimo de esta capa que produce interferencia destructiva para luz con una longitud de onda en aire de 550 nm?.

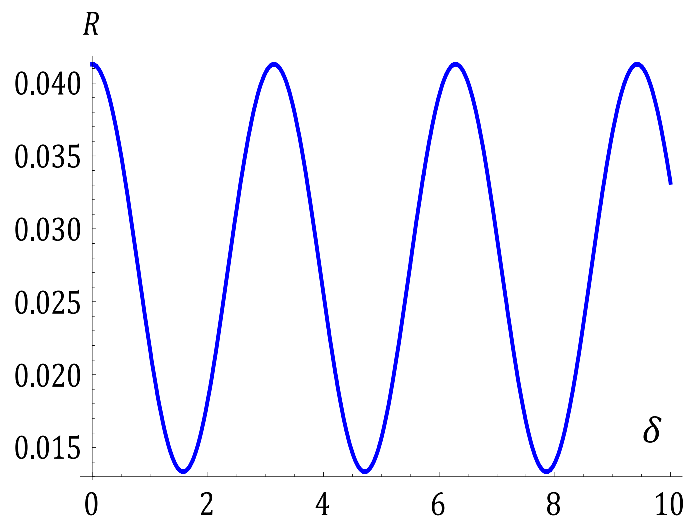
Los mínimos de reflexión aparecen en este caso en:

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots,$$

El espesor mínimo es por lo tanto

$$d_{min} = \frac{c}{4fn_c} = \frac{\lambda_{aire}}{4n_c} = 99.64 \text{ nm}.$$

Especial cuidado debe prestarse en los casos de dos (2) y tres (3) medios. Obsérvese la diferencia en las escalas y en la posición relativa de los máximos y mínimos de reflectividad en los casos de una película simple y una película sobre un sustrato *semi-infinito* de vidrio. Otros espesores que producen efectos similares son: 298.9 nm, 498.2 nm, 697.5 nm…



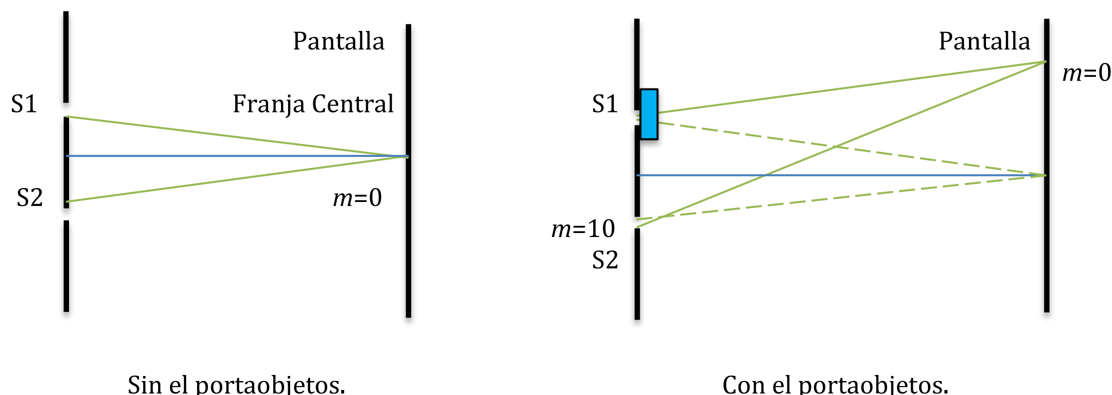
4.158 El Telescopio espacial Hubble es capaz de resolver imágenes ópticas a una resolución angular de 2.8×10^{-7} rad con su espejo de 2.40 m. Qué tan grande tendría que ser un radiotelescopio para obtener la imagen de un objeto en el espectro de radio con la misma resolución, suponiendo que la longitud de onda es de 10 cm?.

R. Con la misma resolución del Hubble, aplicamos el criterio de Rayleigh para estimar el diámetro del hipotético instrumento:

$$d = 1.22\frac{\lambda}{\Delta\theta} \sim 4.36 \times 10^5 \text{ m}.$$

Aproximadamente de 436 km!.

4.159 En un experimento de doble rendija, luz láser He-Ne de 633 nm produce un patrón de interferencia en una pantalla colocada a cierta distancia de las rendijas. Cuando una de las rendijas se cubre con un portaobjetos de vidrio de 12 micras de espesor, la franja central se desplazó al punto ocupado antes por la franja oscura número 10. Cuál es el índice de refracción del vidrio?.



Sin el portaobjetos. Con el portaobjetos.

R. (Ver Ejercicio ***4.125***). La separación entre la franja central y la décima franja oscura en la situación inicial en donde no se involucra el vidrio es:

$$\Delta y = \frac{D\Delta r}{d} = \frac{19D\lambda}{2d},$$

en donde D es la distancia a la pantalla y d corresponde a la distancia entre las rendijas. Al cubrir una de las aberturas con vidrio, la diferencia de fase debido al recorrido adicional de uno de los rayos emergentes se aproxima a: $l \approx (n-1)t$, con t como el espesor de la película. Esta diferencia de recorrido debe ser igual al desplazamiento de la franja brillante central: $19\lambda/2$. Entonces:

$$n = 1 + \frac{19\lambda}{2t} = 1.501.$$

El cálculo del índice de refracción, en la aproximación de pantalla lejana, no involucra los parámetros D y d.

4.160 Una rejilla de difracción contiene 4000 ranuras/cm y tiene luz blanca (400 – 700 nm) que incide sobre ella. Qué longitud(es) de onda será(n) visible(s) a 45°?

R. La posición de los máximos de difracción están condicionados por la expresión:

$$d \sin\theta_m = m\lambda,$$

En donde d es la distancia entre ranuras adyacentes: 1/4000 cm = 2.5 μm. Si el ángulo de difracción es 45°, entonces debe cumplirse:

$$1767 = m\lambda$$

con λ en nm. Los órdenes de los máximos posibles entre 400 y 700 nm en el visible están entre 3 y 4 los cuales corresponderían a longitudes de onda de 587 nm (amarillo) y 441.75 nm (azul). El tipo de color resultante puede consultarse en:

http://www.efg2.com/Lab/ScienceAndEngineering/Spectra.htm

4.161 Luz láser de Argón choca con una rejilla de difracción que tiene 7020 ranuras por centímetro. Los máximos principal central y de primer orden están separados 0.332 m sobre una pared a 1 m de la rejilla. Determinar la longitud de onda de la luz láser.

R. El ángulo aproximado sobre el cual se encuentra el máximo de primer orden en la pantalla, medido con respecto a la horizontal perpendicular al plano de la pantalla es:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0.332}{1}\right) = 18.36°.$$

Interferencia constructiva de primer orden está definida por $d \sin\theta_1 = \lambda = 448.8$ nm, en donde d es la distancia entre las rendijas: 1/7020 cm.

4.162 Un disco *Blue-ray* usa un láser azul con una longitud de onda de espacio libre de 405 nm. Si el disco está protegido con policarbonato con índice de refracción de 1.58, determine el espesor mínimo del disco que produce interferencia destructiva. Comparar este valor con el de los CD iluminados con luz infrarroja.

R. El espesor mínimo de una película delgada que producirá interferencia destructiva de primer orden es:

$$t_{min} = \frac{\lambda}{4n} = 64.08 \text{ nm}.$$

Este es tamaño típico de la *profundidad* de un pozo en una pista del disco, el cual, al ser codificado ópticamente, representaría un bit de información colectado en una configuración de fotodiodos los cuales a su vez lo transformarán el estado de interferencia en una señal eléctrica. Para el caso de un CD iluminado con luz infrarroja de 700 nm, y con el mismo índice de refracción $t_{min} = 110.8$ nm, casi el doble de tamaño comparado con el sistema Blu-ray. Esto permite a la tecnología del láser que emite en el azul la posibilidad de procesar mayor densidad de información en un tamaño similar.

4.163 Una rejilla de difracción de 5 cm de ancho con 200 ranuras se utiliza para resolver dos líneas estrechamente espaciadas (doblete) en un espectro. El doblete consta de dos longitudes de onda: $\lambda_a = 629.8$ nm y $\lambda_b = 630.2$ nm. La luz ilumina toda la rejilla en incidencia normal. Calcular los ángulos con respecto a la normal en los que los haces difractados de primer orden θ_{1a} y θ_{1b} son reflejados desde la rejilla. Qué orden de difracción se requiere para resolver estas dos líneas con esta rejilla?

R. Si el número de ranuras es $N = 200$, el orden de la resolución mínimo requerido se estima desde:

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \times N} = \frac{630}{0.4 \times 200} \sim 7.8\ (\mathbf{7})$$

Los ángulos de difracción de primer orden se estiman desde la expresión:

$$\theta_{1a} = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda_a}{d}\right) = 0.14434°; \qquad \theta_{1b} = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda_b}{d}\right) = 0.144431°.$$

4.164 La intensidad de la luz difractada por una rendija de ancho a en la aproximación de pantalla lejana tiene la forma:

$$I(u) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2,$$

en donde $u = \pi a y/\lambda D$, y como la distancia vertical desde el centro de la pantalla y D corresponde a la distancia desde la rendija. Calcular el valor de la integral de la intensidad cumulativa

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(u)dy,$$

el cual corresponde a la potencia promedio total por unidad de longitud de la luz difractada sobre la pantalla.

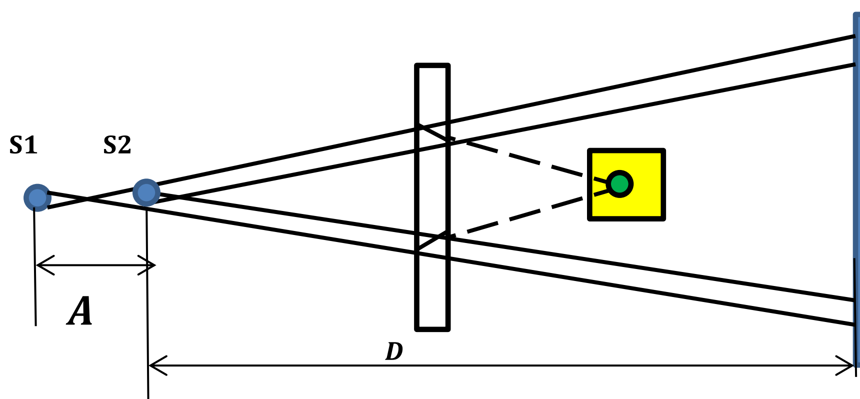
R. Considerando el resultado de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(u)du = \pi I_0,$$

obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(u)dy = \frac{D\lambda}{a} I_0.$$

4.165 *Interferómetro de Pohl.* Discutir el diagrama de interferencia que se produce sobre una pantalla cuando las fuentes S1 y S2 están separadas una pequeña distancia a y colocadas según una línea perpendicular a la pantalla. Experimentalmente, las dos fuentes podrían ser las dos imágenes de una fuente luminosa producidas por la reflexión en las dos caras de una lámina delgada de mica.



R. La diferencia de recorrido entre las dos ondas provenientes de las fuentes S1 y S2 es:

$$\Delta r = \sqrt{(D+a)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + y^2} \approx \frac{Da}{\sqrt{D^2 + y^2}}, \;\; a \ll D.$$

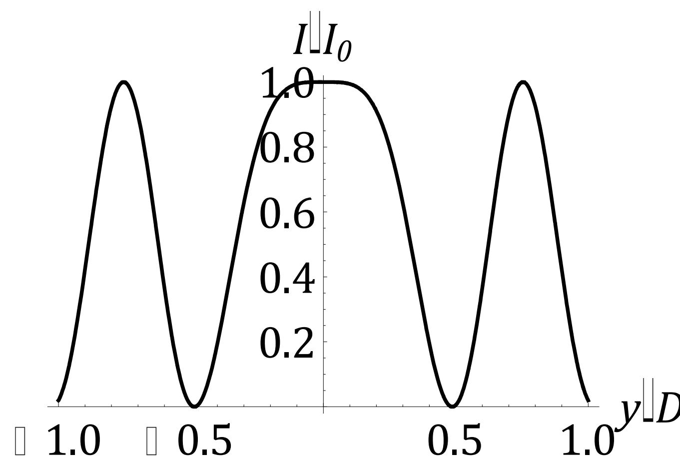
Interferencia constructiva se presentará en las posiciones

$$y_n = \pm \frac{D\sqrt{a^2 - \lambda^2 n^2}}{\lambda n}, \;\; n = 1, 2, 3 \dots$$

con $a > \lambda n$, mientras que el patrón de interferencia destructiva se presentará en los puntos

$$y_n = \pm \frac{D\sqrt{4a^2 - \lambda^2 - 4\lambda^2 n - 4\lambda^2 n^2}}{\lambda(1+2n)}, \;\; n = 0,1, 2 \dots$$

con $2a > \lambda(2n+1)$.



Patrón de interferencia del dispositivo de Pohl con $\pi D/\lambda = 500,\;\; a/D = 0.01$.

4.166 *La Magnificación Longitudinal* de una lente m_l describe el alargamiento o encogimiento aparente de un objeto en dirección a lo largo del eje óptico. Demostrar que la magnificación longitudinal $m_l = di/do$ está dada por:

$$m_l = -m^2 = -\left(\frac{f}{o-f}\right)^2.$$

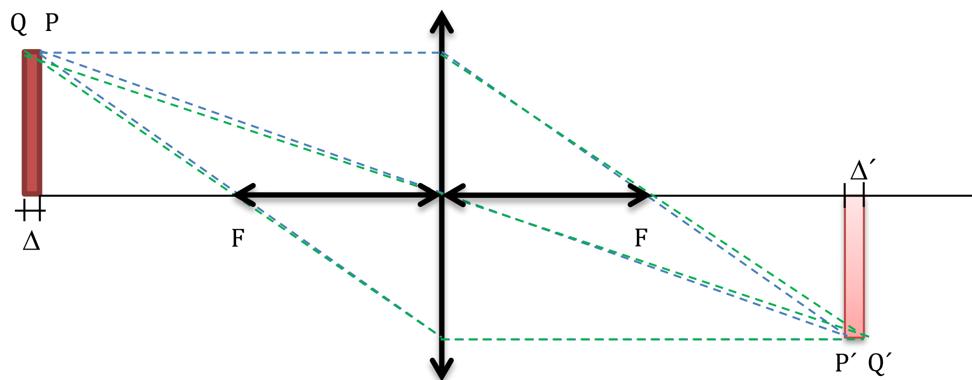
R. La distancia imagen en una lente convencional se define como:

$$i = \frac{of}{o-f} = om.$$

La variación de la posición de la imagen con respecto a la posición del objeto define la magnificación longitudinal:

$$m_l = \frac{di}{do} = \frac{d}{do}\left(\frac{of}{o-f}.\right) = \frac{f}{(o-f)} - \frac{of}{(o-f)^2} = \frac{f}{(o-f)}\left(1 - \frac{o}{o-f}\right) = -\left(\frac{f}{o-f}\right)^2 = -m^2.$$

Es posible demostrar esta ecuación con argumentos puramente geométricos. El siguiente diagrama ilustra la trayectoria de dos rayos provenientes desde los puntos P y Q sobre el objeto y sus posiciones de la imagen (invertida) P' y Q'.



Considérese un objeto de espesor Δ el cual proyecta una imagen sobre una lente con espesor aparente Δ'. Las posiciones de la imagen asociada a los puntos paralelos al eje óptico P' y Q' se relacionan con las posiciones del objeto en P y Q desde la fórmula simple:

$$Q' - P' = \frac{Qf}{Q-f} - \frac{Pf}{P-f}.$$

Con $Q' - P' = \Delta'$ y $Q - P = \Delta$, obtenemos la relación de espesores con respecto a la posición del objeto:

$$\Delta' = \frac{(P+\Delta)f}{P+\Delta-f} - \frac{Pf}{P-f}.$$

Para el caso $\Delta \to 0$ (espesores de objetos suficientemente pequeños en dimensión comparada con la distancia focal y la posición del objeto P), la expansión en series de la ecuación anterior conduce a:

$$\Delta' = -\frac{f^2\Delta}{(P-f)^2} + \frac{f^2\Delta^2}{(P-f)^3} + \cdots +$$

En primer orden:

$$m_l = \frac{\Delta'}{\Delta} \approx -\frac{f^2}{(P-f)^2},$$

El cual coincide con la fórmula anterior.

4.167 La ecuación de una lente delgada para lentes convergentes y espejos convexos

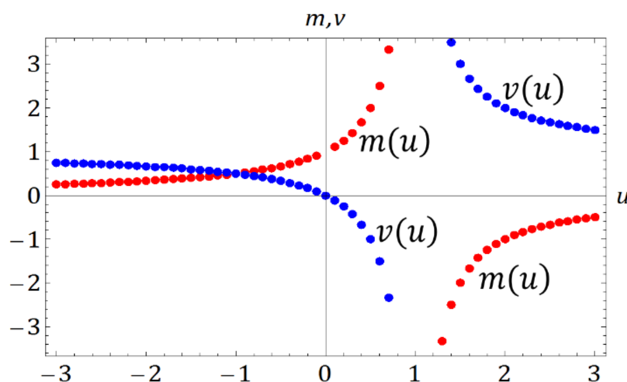
$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f},$$

puede ser normalizada dividiendo todas las distancias por la longitud focal f. Este procedimiento conduce a:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1,$$

en donde u es la distancia objeto y v la distancia imagen en unidades de f. Bosquejar un gráfico $v(u)$ en el rango de $u=-3$ a $u=+3$ en pasos de 0.1. Describir el carácter (real o virtual) del objeto o la imagen en cada cuadrante de la gráfica.

R. Las gráficas de $v(u)$ [Puntos Azules] y la magnificación $m(u)$ [Puntos Rojos] se ilustra en la figura adjunta. Para distancias del objeto $u \gg 1$, la distancia imagen v (real) tiende a 1 (i.e., la imagen se localiza en el foco) mientras que la magnificación es invertida y menor que 1 (reducida) en magnitud. Si la distancia del objeto es menor que la distancia focal de la lente $0 < u < 1$, la imagen es virtual, derecha con magnificación mayor que 1 (aumentada). Si el objeto se localiza por *detrás de la lente* con $u < 0$, la imagen formada es real, derecha y reducida. Un objeto localizado a una distancia muy lejana por detrás de la lente convergente formará una imagen real y reducida en el foco.



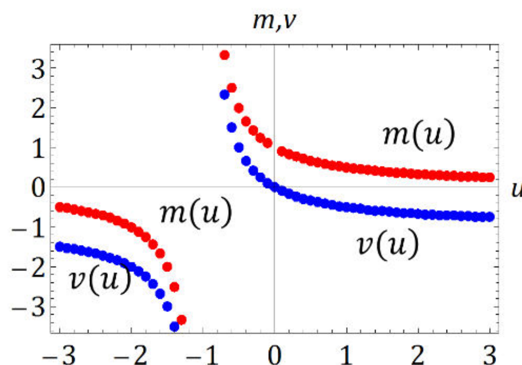
4.168 La ecuación de una lente delgada para lentes divergentes y espejos cóncavos

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f},$$

puede ser normalizada dividiendo todas las distancias por la longitud focal $|f|$. Este procedimiento conduce a:

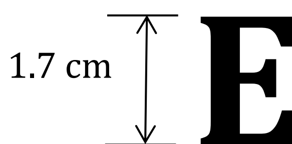
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=-1,$$

en donde u es la distancia objeto y v la distancia imagen en unidades de $|f|$. Bosquejar un gráfico $v(u)$ en el rango de $u=-3$ a $u=+3$ en pasos de 0.1. Describir el carácter (real o virtual) del objeto o la imagen en cada cuadrante de la gráfica.



R. Las gráficas de $v(u)$ [Puntos Azules] y la magnificación $m(u)$ [Puntos Rojos] se ilustra en la figura adjunta. Para distancias del objeto $u \gg 0$, la imagen es virtual y localizada en el foco, mientras que la magnificación es derecha y reducida tendiendo a cero. Si el objeto se localiza en la región $-1 < u < 0$, la imagen es real, derecha con magnificación mayor que 1 (aumentada). Si el objeto se localiza por *detrás de la lente* con $u < |f|$, la imagen formada es virtual, invertida y reducida. Un objeto localizado a una distancia muy lejana por detrás de la lente divergente formará una imagen real y reducida en el foco.

4.169 Si se sostiene un texto a una distancia de 25 cm del ojo, que tan grande será la imagen de las siguiente letra en la retina? (Primera letra de la Carta de Snellen).



R. En el modelo simplificado para la lente del ojo humano, la distancia focal es 18.5 cm cuando el objeto se localiza a 25 cm. La distancia lente-retina permanece esencialmente fija e igual a 20 mm. El ángulo subtendido por el tamaño del objeto con respecto al eje óptico es:

$$\tan\theta \approx \frac{1.7}{25}; \qquad \theta \approx 0.068 \text{ rad } (3.89°).$$

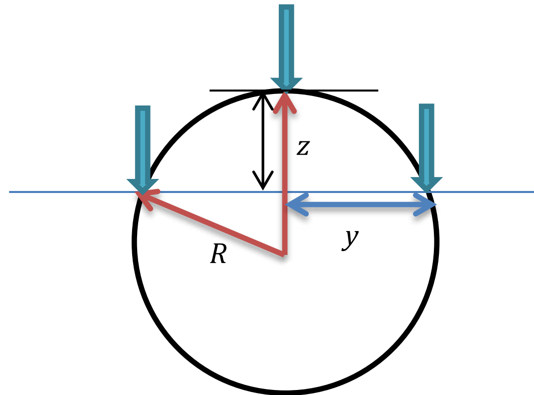
El tamaño de la imagen formada en la retina es:

$$D = 20 \text{ mm} \times \tan\theta = 1.36 \text{ mm},$$

el cual corresponde a un factor de 0.08 del valor del tamaño real.

4.170 Un esferómetro es un dispositivo utilizado para medir el radio de curvatura R de superficies esféricas. Consiste en tres brazos posicionados en un triángulo equilátero de lado y. El centro de prueba es ajustado con un tornillo micrométrico. Inicialmente, el esferómetro es montado sobre una superficie plana, definiendo de esta forma el valor de referencia cero en el micrómetro. El instrumento es luego colocado sobre una superficie esférica y el micrómetro es ajustado hasta que el centro de prueba toca la superficie. El desplazamiento z entre las dos medidas se conoce como *sagita (también como flecha).* (a) Obtener una relación entre el radio de curvatura R, y las longitudes y, z. (b) Un estudiante anota los siguientes datos asociados a las posiciones del micrómetro (mm): Superficie plana: 11.222, cara convexa: 8.716, cara cóncava: 12.473, con $y = 50$ mm. El estudiante mide también la distancia focal, con un resultado de 186 cm. Cuál es el índice de refracción del material del lente?.

R. (a) Representamos las longitudes características del esferómetro en el siguiente diagrama:



La geometría ilustrada conduce a la ecuación: $(R-z)^2+y^2=R^2$.

$$z^2-2Rz+y^2=0; \qquad R=\frac{z^2+y^2}{2z}.$$

(b) Las distancias medidas (z) para la lente son: en la cara convexa: $z_{\text{convexa}}=11.222-8.716=2.506$ mm. En la cara cóncava: $z_{\text{con}}=|11.222-12.473|=1.251$ mm. Los radios de curvatura son: $R_{\text{convexa}}=R_1=500.056$ mm, $R_{\text{concava}}=-R_2=-999.826$ mm. Desde la ecuación del constructor de lentes:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{|R_2|}\right)=\frac{1}{f},$$

se obtiene el índice de refracción:

$$n=1+\frac{R_1|R_2|}{f(|R_2|-R_1)}=1.53786.$$

Nótese la asignación de los signos para los radios de curvatura.

4.171 El espejo retrovisor de un auto es convexo y tiene un radio de curvatura de 22 cm. Otro auto se encuentra a 17 m desde el espejo. En dónde se localiza su imagen?.

R. Utilizamos la expresión para los espejos esféricos:

$$\frac{1}{x_O}+\frac{1}{x_I}=\frac{2}{r},$$

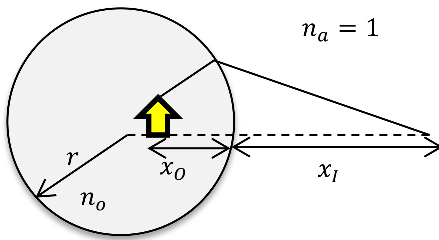
en donde x_O, x_I y r son las posiciones objeto, imagen y radio de curvatura, respectivamente. Según la convención típica para los espejos: $x_O=+0.17$ m, $r=-0.22$ m.

$$\frac{1}{x_I}=\frac{2}{r}-\frac{1}{x_O}=\frac{2}{-0.22}-\frac{1}{+0.17}=-14.93\ \text{m}^{-1}.$$

$$x_I=-6.67\ \text{cm}.$$

La imagen aparece a -6.67 cm en la parte posterior del espejo.

4.172 Una lámpara de aceite consiste en un vidrio muy delgado en forma esférica de 8.5 cm de radio. A lo largo de la línea observación, la candela está a 6.0 cm desde la superficie. A qué distancia se encuentra su imagen? ($n_o = 1.5$).



R. Utilizamos

$$\frac{n_o}{x_O} + \frac{n_a}{x_I} = \frac{n_a - n_o}{r}.$$

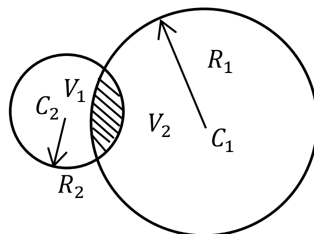
Con $n_a < n_o, r < 0$ (la superficie es cóncava hacia el objeto) y $x_O = 6$ cm, la posición de la imagen es x_I es $x_I = -5.2$ cm. La imagen se localiza en *el interior* de la lámpara. En ésta fórmula, n_a corresponde al índice en donde se localiza el observador, que no necesariamente es igual al de la localización de la imagen.

4.173 Los radios de curvatura de una lente delgada doblemente convexa con índice $n = 1.5$ tienen la relación 2 a 1. Escribir una expresión para R, el más pequeño de los dos radios, en términos de la distancia focal f.

R. La expresión general para la distancia focal de una lente delgada de radios de curvatura R_1 y R_2, con índice de refracción n inmersa en un medio con índice n_m es:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

con las referencias de los radios según el diagrama de la figura anexa.



Si el centro de curvatura C de la lente está a la derecha (izquierda) de su vértice V, entonces la convección del signo para el radio es positiva (negativa). Para el caso de la lente biconvexa, $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$. En términos del radio más pequeño, $|R_1| = 2|R_2| = 2R$, y

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{3}{2R}\left(\frac{n}{n_m} - 1\right).$$

Una interface separa dos medios de índices de refracción 1 y 2

$$f = \frac{2Rn_m}{3(n - n_m)}.$$

Si la lente se sitúa en el aire $n_m = 1$ y $n = 1.5$ finalmente $R = 3f/4$.

4.174 Una lente delgada *equi-convexa* de vidrio Flint ($n = 1.65$) tiene una longitud focal de 62 cm cuando está inmersa en aire. Determine sus radios de curvatura.

R. la distancia focal en este sistema es:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{2}{R}\right),$$

y los radios de curvatura son $R = \pm 2(n-1)f = \pm 80.6$ cm.

4.175 Una barra de diamante ($n_d = 2.42$) posee un extremo en forma de hemisferio convexo de 20 cm de curvatura. Un pequeño defecto yace a 20 cm desde el vértice sobre el eje central. Dónde aparecerá su imagen cuando la barra se sumerge en agua con $n_w = 1.33$.

R. Desde la relación

$$\frac{n_d}{s_O} + \frac{n_w}{s_I} = \frac{n_w - n_d}{R}.$$

El centro de curvatura está a la izquierda del vértice, $R < 0$. En magnitud $|R| = |s_O|$. La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{n_w}{s_I} = -\frac{n_w}{|R|},$$

cuya solución es $s_I = -|R| = -20$ cm. Si el radio de curvatura es igual a la distancia objeto, la distancia imagen es independiente del medio en el cual el diamante esté sumergido. La imagen se creará a 20 cm a la izquierda del vértice.

4.176 Una cámara simple consiste en una lente delgada positiva la cual crea una imagen real sobre el plano de la película. Suponer que la lente tiene una longitud focal de 50 mm. Qué tal lejos de un objeto de 1 m de altura debe localizarse la cámara si la imagen debe aparecer con 25 mm de altura?. Qué tal lejos de la lente deberá estar la película?

R. La magnificación transversal es la relación de la altura imagen a la altura objeto $M_T = y_I/y_O = -s_I/s_O = 25 \times 10^{-3}$. Con $1/s_I + 1/s_O = 1/f$. La imagen es positiva real e invertida. La distancia objeto $s_O = f(|M_T| + 1)/|M_T| = 2.05$ m. $s_I = |M_T| s_O = 51.3$ mm.

4.177 Una lente delgada para la cual el objeto y la imagen están separadas por una distancia L. Hallar una relación de L en términos de la distancia focal f y la magnificación M_T.

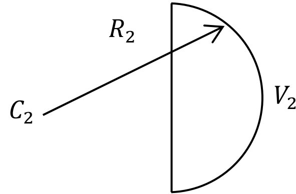
R. Sin especificaciones de la naturaleza de la lente:

$$\frac{1}{s_I} + \frac{1}{s_O} = \frac{1}{f}; \quad L = s_O + s_I, \; M_T = -\frac{s_I}{s_O}.$$

Combinado estas expresiones:

$$s_O = f\frac{(M_T - 1)}{M_T}, \quad L = -f\frac{(M_T - 1)^2}{M_T}.$$

4.178 Cuál es la relación de la distancia focal de una lente delgada plano-convexa a la distancia focal de una lente delgada biconvexa, presumiendo que los índices son los mismos y todas las superficies esféricas tengan la misma curvatura?



R. En el caso de la lente plano-convexa, $R_1 \to \infty$, y $R_2 = -|R|$. Desde la fórmula $1/f = (n/n_m - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$, obtenemos, con $n_m = 1$:

$$\frac{1}{f_{pc}} = \frac{(n-1)}{R}.$$

Para la lente biconvexa de igual curvatura $R_1 \to R$ y $R_2 = -|R|$:

$$\frac{1}{f_{bc}} = \frac{2(n-1)}{R} = \frac{2}{f_{pc}}. \qquad \frac{f_{pc}}{f_{bc}} = 2.$$

4.179 Considere una lente gruesa con índice de refracción 2, cuyos radios de curvatura son iguales y negativos. Si los centros de curvatura están separados por una distancia d y si la lente está rodeada por aire, describa brevemente sus propiedades.

R. La distancia focal es positiva e igual a:

$$f = +\frac{2R^2}{d}.$$

Los planos principales están localizados en $(R < 0)$: $h_1 = h_2 = -R$. La distancia entre los planos es d:

$$\overline{V_1H_1} = h_1 = -f\frac{(n-1)d}{nR_2} = +\frac{fd}{2|R|},$$

$$\overline{V_2H_2} = h_2 = -f\frac{(n-1)d}{nR_1} = +\frac{fd}{2|R|},$$

$$h_1 + h_2 = \frac{fd}{|R|} = 2|R| = d.$$

4.180 Cuál es la distancia focal de una gota esférica de benceno en el aire $(n_b = 1.501)$ con un radio de 2 mm? Describir la imagen resultante de un objeto 0.5 mm de altura a 5.3 cm desde el centro de la gota.

R. La distancia focal de una lente esférica se obtiene desde la fórmula general para los lentes gruesos con $R_1 = R$, $R_2 = -R$ y $d = 2R$, $f = n_bR/2(n_b - 1) = 2.99$ mm. Las distancias entre los planos principales y los vértices son $h_1 = +R$, $h_2 = -R$, es decir, la distancia entre estos planos es cero. Con $s_O = 5.3$ cm, $s_I = 0.32$ cm desde el centro de la esfera. La magnificación

transversal es $M_T = -s_I/s_O = -0.060$. La altura de la imagen $y_I = M_T y_O = -0.03$ mm. La imagen es real, invertida y reducida.

4.181 Calcular el radio de la zona m-ésima de Fresnel si la distancia desde la fuente hasta la placa zonal es a, y la distancia desde la placa hasta el lugar de observación es b. La longitud de onda es λ. Hallar el radio de la primera zona, si $a = b = 10$ m y la longitud de onda es 450 nm.

R. El radio de la m-ésima zona puede obtenerse desde

$$m\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\rho^2.$$

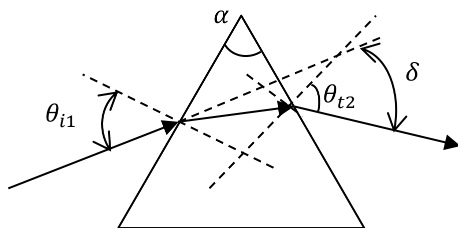
Adaptando esta ecuación $R_O = b$, $R_S = a$,

$$\rho_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}.$$

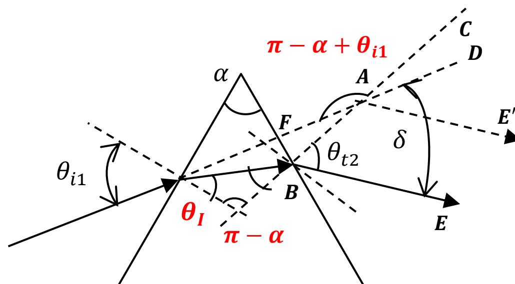
El radio de la primera zona es: $\rho_1 = \sqrt{\lambda a/2} = 1.5$ mm.

4.182 Cuál es la intensidad $\langle I \rangle$ de la luz en el foco de una placa zonal, si se cubre toda la placa excepto la parte superior de la primera zona de Fresnel?. La intensidad de la luz sin pantalla es $\langle I_0 \rangle$. Cuál es la intensidad de la luz si están cubiertas todas las zonas excepto la primera?

R. La amplitud del campo en el foco de la placa zonal es, para la primera zona descubierta, igual a $(1/2) \times 2E_0$ y la intensidad en este punto por lo tanto $\langle I_0 \rangle$. En el caso de todas las zonas cubiertas excepto la primera, la amplitud resultante del campo es $2E_0$ y la intensidad es $4\langle I_0 \rangle$.

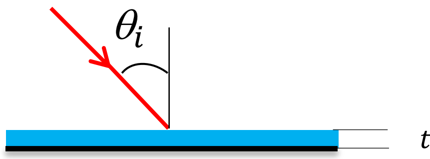


4.183 Un rayo atraviesa un prisma, como se ilustra en la figura anexa. Demostrar que un rayo experimenta una desviación δ dado por: $\delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} - \alpha$.



R. Cfr. Ej. ***4.31***. El ángulo entre los segmentos $\overline{AC}$ Y $\overline{AD}$ es $\alpha - \theta_{i1}$, igual al ángulo del haz incidente $\overline{FD}$ con el segmento normal a la superficie del prisma $\overline{BC}$. Los ángulos $\measuredangle\overline{ABE}$ Y $\measuredangle\overline{CAE'}$ son ángulos correspondientes, con $\measuredangle\overline{CBE} = \measuredangle\overline{ABE} = \measuredangle\overline{CAE'} = \theta_{t2}$. El segmento $\overline{AE'}$ es paralelo al segmento $\overline{BE}$, por lo tanto la diferencia $\measuredangle\overline{CBE} - \measuredangle\overline{CAD}$ es el ángulo de desviación δ:

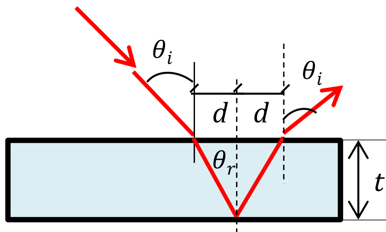
$$\delta = \theta_{t2} - (\alpha - \theta_{i1}).$$



4.184 Un espejo real consiste en una placa de vidrio con una película reflectora en su parte posterior. Calcular en donde y en qué ángulo de desviación el rayo incidente abandona el espejo, si el índice de refracción es n_v. La respuesta debe darse en términos del ángulo de incidencia θ_i, n_v y el espesor t.

R. El rayo incidente experimenta una primera refracción con un ángulo θ_r con respecto a la horizontal, según la ecuación [n_a- índice del aire]:

$$\sin\theta_r = \frac{n_a}{n_v}\sin\theta_i.$$



La distancia d, la cual corresponde a la distancia horizontal que recorre el haz refractado cuando alcanza la superficie reflectora posterior es: $d = t\tan\theta_r$. La distancia en la cual el haz incidente abandona el espejo es $D = 2d$:

$$D = 2t\frac{\sin\theta_r}{\cos\theta_r} = 2t\frac{\sin\theta_r}{\sqrt{1-\sin^2\theta_r}} = \frac{2tn_a}{\sqrt{(n_v\csc\theta_i)^2 - n_a^2}}$$

El ángulo de salida es igual al ángulo de incidencia con respecto a la normal.

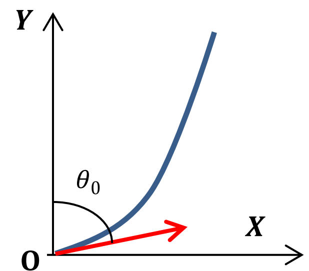
4.185*** *Principio de Fermat.* El tiempo de tránsito para una onda que viaja a lo largo de una trayectoria que conecta dos puntos (A) y (B) está definido a través de la representación integral del principio de Fermat: $\Delta t = c^{-1}\int_A^B n(x,y,z)ds$, en donde $n(x,y,z)$ es el índice de refracción variable (variable en el espacio) y ds es un elemento de longitud a lo largo de la trayectoria. Explícitamente: $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+(dx/dy)^2+(dz/dy)^2}dy, x'(y) = dx/dy, z'(y) = dz/dy$. Reemplazando:

$$\Delta t = c^{-1}\int_A^B n(x,y,z)\sqrt{1+(dx/dy)^2+(dz/dy)^2}dy = c^{-1}\int_A^B \mathcal{L}(x,z,x'(y),z'(y),y)dy.$$

El tiempo de recorrido es un mínimo $[\delta(\Delta t) = 0]$ si se satisfacen las denominadas ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\right) = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'}\right) = 0.$$

Considere un índice de refracción variable en el espacio según la relación: $n(y) = (1+ay)^{1/2}$. Hallar la trayectoria de un rayo que abandona el origen a un ángulo θ_0.



R. La función $\mathcal{L}$ (Lagrange) toma la forma particular:

$$\mathcal{L}(x,y) = n(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = n(y)\sqrt{1+x'^2}.$$

Evidentemente $\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$ y

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}\right) = C = \text{constante}.$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}\right) = \frac{n(y)x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C.$$

Despejando x' obtenemos la ecuación para la trayectoria:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C}{\sqrt{n(y)^2 - C^2}} = \frac{C}{\sqrt{1+ay-C^2}}.$$

Integrando directamente:

$$x = \int \frac{C}{\sqrt{1+ay-C^2}}dy; \qquad x + D = \frac{2C}{a}\sqrt{1+ay-C^2}.$$

Con D como una constante de integración. Utilizando la condición en el origen:

$$D = \frac{2C}{a}\sqrt{1-C^2}.$$

También:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0} = \tan\theta_0 = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}.}, \quad C = \sin\theta_0\,, \;\; D = \frac{2}{a}\sin\theta_0\cos\theta_0.$$

Finalmente:

$$y(x) + \frac{\cos^2\theta_0}{a} = \frac{a}{4\sin^2\theta_0}\left(x + \frac{2}{a}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2.$$

La trayectoria del haz es parabólica. Si el haz es emitido a lo largo del eje horizontal, éste se desviará según la ecuación:

$$y(x) = \frac{a}{4}x^2.$$

Nota: Nótese que la relación $\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \mathcal{L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{\varepsilon}') - \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ puede escribirse como: $[\boldsymbol{x}' = d\boldsymbol{x}/d\eta]$

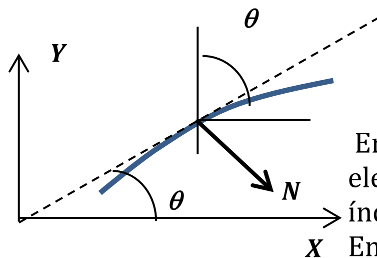
$$\delta\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \cong \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}'\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}'} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}} + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\eta}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}'} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}} + \frac{d}{d\eta}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}'}\right) - \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}'}\right).$$

Evaluando la integral $\delta\int\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d\eta = 0$, el segundo término de la última línea desaparece en los límites del parámetro η, i.e. los puntos inicial y final son puntos específicos: $\boldsymbol{\varepsilon}(\eta_2) = \boldsymbol{\varepsilon}(\eta_1) = 0$. Finalmente se obtienen las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}} - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x}'}\right) = 0.$$

4.186**Partiendo de la ley de refracción de la luz demostrar que el radio de curvatura ρ del rayo de luz al propagarse por un medio transparente y homogéneo con un índice de refracción que varía suavemente, se determina a través de la ecuación: $\rho^{-1} = d(\ln n)/dN$, donde la derivada se toma según la dirección de la normal principal N al rayo.

R. Utilizamos la definición fundamental de curvatura κ: Weisstein, Eric W. "curvature." from *mathworld*--a wolfram webresource. http://mathworld.wolfram.com/curvature.html

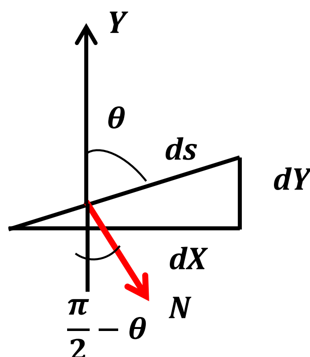


$$\kappa = \frac{1}{\rho} \equiv \frac{d\theta}{ds},$$

En donde θ es el ángulo tangente a la trayectoria y ds es el elemento de longitud de arco. Para un medio estratificado con índice variable, el producto $n\sin\theta$ permanece constante. Entonces: $\sin\theta\, dn + n\cos\theta\, d\theta = 0$.

$$d\theta = -\frac{dn}{n}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Reemplazando: $\kappa = -(1/n)\tan\theta\, dn/ds$. Una construcción geométrica simple conduce a las relaciones: $dY = ds\cos\theta$, $dY = -dN\sin\theta$

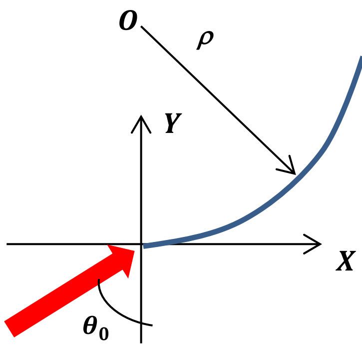


$$\kappa = -\frac{1}{n}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{dn}{ds} = -\frac{\sin\theta}{n}\frac{dn}{dY} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dN}.$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d}{dN}(\ln n).$$

En esta expresión d/dN debe interpretarse en términos de la derivada direccional normal a lo largo de la trayectoria del rayo.

4.187 Utilizar el resultado anterior y calcular el radio de curvatura de un haz de luz que incide en un medio que cambia según la relación $n(y) = (1+ay)^{1/2},\ y > 0$.



R. Aplicamos directamente la relación;

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin\theta}{n}\left(\frac{dn}{dy}\right)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{n_0\sin\theta_0}{n^2}\left(\frac{dn}{dy}\right) = -\frac{an_0}{2n^3}\sin\theta_0.$$

El radio de curvatura es $|\rho| = 2n^3/an_0\sin\theta_0$ tomando $n\sin\theta \cong n_0\sin\theta_0$, y n_0 como el índice de refracción en la frontera. La curvatura tiende a cero cuando $y\to\infty$ indicando que el haz tiende a adquirir una trayectoria lineal en regiones suficientemente alejadas de la frontera.

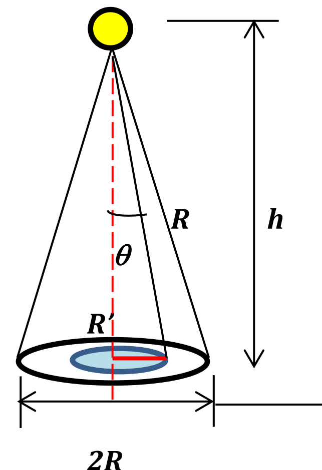
4.188 Una habitación es iluminada con una fuente *puntual* en el techo con una longitud de onda aproximada de 600 nm. (a) Cuál es la diferencia de fase entre el centro de un agujero de 0.5 m de diámetro en el piso, y su circunferencia, localizado a 2.5 m por debajo de la fuente?. (b) Si la fuente emite ondas con una potencia $P = 50$ W, calcular la potencia neta de la radiación incidente que atraviesa el área del agujero.

R. (a) La diferencia de fase es igual el producto del número de onda y la diferencia de recorrido de las ondas provenientes de la fuente:

$$\Delta\varphi = k\Delta r.$$

Entre el centro y el borde del agujero, la diferencia de recorrido de la onda luminosa es:

$$\Delta r = \sqrt{R^2+h^2} - h.$$



Reemplazando:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\sqrt{R^2+h^2} - h\right],$$

el cual implica un retraso temporal del orden de $\Delta t = 4.16\times 10^{-11}$ s. (b) A cualquier distancia r desde la fuente, la intensidad media de la radiación es:

$$\langle I\rangle = \frac{P}{4\pi r^2}, \qquad (\mathrm{W/m^2}).$$

En un diferencial de área del círculo plano dS existe un flujo de potencia dW

$$dW = \langle I \rangle dS = \frac{P}{4\pi r^2} \cos\theta \, dS,$$

en donde θ es el ángulo relativo entre la normal al elemento dS y la dirección radial asociada a las líneas de flujo desde la fuente puntual. Integrando sobre todos los elementos dS:

$$W = \frac{P}{4\pi} \int_0^R \frac{1}{(h^2 + R'^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + R'^2}} 2\pi R' dR' = \frac{P}{2}\left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right] = 0.124 \text{ W}.$$

En el caso $R \to \infty$, $W \approx P/2$, y la potencia luminosa que atraviesa el plano inferior a la fuente es exactamente igual a la mitad del valor de la potencia que emite la fuente.

4.189 ** Calcular el patrón de difracción de Fraunhofer de una rendija simple la cual es iluminada (con incidencia normal) por una onda cuya amplitud varía parabólicamente a lo largo de la rendija (cero en los extremos, máximo en el centro). Demostrar que, comparado al caso de iluminación uniforme, el máximo central se ensancha y el máximo secundario es deprimido.

R. Modificamos el resultado de la sección **4.6** considerando la condición enunciada en el texto: el diferencial del campo eléctrico en un punto P arbitrario sobre una pantalla lejana es:

$$dE(P) = E_0 \left(1 - \frac{4y'^2}{a^2}\right)\left(\frac{dy'}{a}\right) \sin\big(\omega t - k(D - y' \sin\theta)\big).$$

Integrando sobre todos los elementos de la rendija:

$$E(P) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dE(P) = \frac{2E_0}{a} \sin(\omega t - kD) \left[\sin\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right) - \frac{ka\sin\theta}{2}\cos\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right)\right] / \left[\frac{ka\sin\theta}{2}\right]^3.$$

Definiendo $u = \pi a \sin\theta / \lambda$, el factor de Fraunhofer se simplifica por:

$$E(P) = \frac{2E_0}{a} \sin(\omega t - kD) \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\right].$$

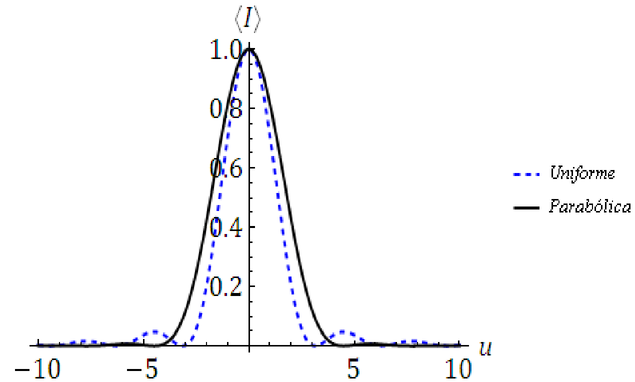
La intensidad media en el punto P es:

$$\langle I \rangle = 9 I_0 \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\right]^2.$$

El factor 9 corresponde a la normalización de la función intensidad media al aplicar el límite $u \to 0$:

$$\lim_{u\to 0} \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\right]^2 = \frac{1}{9}.$$

En la figura se ilustra el patrón de difracción de Fraunhofer normalizado de una sola rendija para una luz con incidencia normal uniforme [línea punteada] y luz con incidencia normal y amplitud variable en un perfil parabólico [línea continua], en función del parámetro u. En este último caso, se nota que el ancho central aumenta y la amplitud de los máximos secundarios disminuyen.



4.190 Repetir el problema anterior para una iluminación de tipo *cosenoidal* (cero en los bordes, máximo en el centro.)

R. La distribución de la intensidad del campo eléctrico puede modelarse en este caso como:

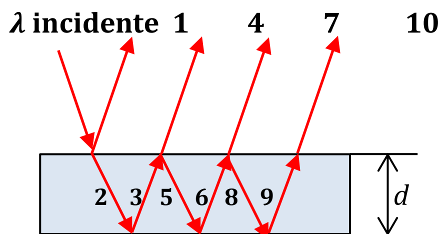
$$E(y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right), \quad -\frac{a}{2} < y' < \frac{a}{2}.$$

Integrando

$$E(P) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dE(P) = \frac{2E_0}{\pi}\sin(\omega t - kD)\left[\frac{\cos u}{1 - \frac{4u^2}{\pi^2}}\right].$$

El patrón de intensidad asociado a esta distribución del campo se superpone al del caso parabólico, discutido en el ejemplo anterior.

4.191* *Luz incidente* de forma normal sobre una película delgada experimenta múltiples reflexiones en el interior de la película [Ver Ejercicio **4.5**]. Demostrar que cuando el rayo **4** y el rayo **1** interfieren constructivamente, los rayos subsecuentes están completamente en fase o completamente en oposición de fase con el rayo **1**. Describir el efecto si el rayo **4** y el rayo **1** están tienen un desfase de π rad. Obtener el coeficiente de reflexión para el caso de incidencia normal.



R. Consideramos que las ondas reflejadas pueden describirse por la superposición de las funciones de onda individuales:

$$\psi_R = \psi_1 e^{i\varphi_1} + \psi_4 e^{i\varphi_4} + \psi_7 e^{i\varphi_7} + \psi_{10} e^{i\varphi_{10}} + \cdots +$$

En donde φ_j es la fase intrínseca asociada a la onda *j-ésima.* Factorizando:

$$\psi_R = e^{i\varphi_1}\left[\psi_1 + \psi_4 e^{i(\varphi_4 - \varphi_1)} + \psi_7 e^{i(\varphi_7 - \varphi_1)} + \psi_{10} e^{i(\varphi_{10} - \varphi_1)} + \cdots +\right].$$

La diferencia de fase entre dos ondas reflejadas consecutivas depende del índice de refracción de la película, su espesor y de la longitud de onda incidente [Ver Ej. **4.24**]. Considerando incidencia normal, la diferencia de fase entre el rayo **1** y el rayo **4** es (la cual aplica para cualquier par de rayos consecutivos reflejados):

$$\Delta\varphi = \varphi_4 - \varphi_1 = \pi\left(\frac{4nd}{\lambda} - 1\right).$$

La diferencia de fase entre el rayo **7** y el rayo **4** es debido *únicamente* a la diferencia de recorrido:

$$\varphi_7 - \varphi_4 = \frac{4\pi nd}{\lambda} = \Delta\varphi + \pi.$$

$$\varphi_7 - \varphi_4 + \varphi_1 - \varphi_1 = \varphi_7 - \varphi_1 - \underbrace{(\varphi_4 - \varphi_1)}_{\Delta\varphi} = \Delta\varphi + \pi.$$

$$\varphi_7 - \varphi_1 = 2\Delta\varphi + \pi.$$

Análogamente, la diferencia de fase entre el rayo **10** y el rayo **7** su relación con el primer rayo es:

$$\varphi_{10} - \varphi_7 = \varphi_{10} - \varphi_7 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1 + \varphi_1 = \Delta\varphi + \pi.$$

$$\varphi_{10} - \varphi_1 - \underbrace{(\varphi_7 - \varphi_4)}_{\Delta\varphi+\pi} - \underbrace{(\varphi_4 - \varphi_1)}_{\Delta\varphi} = \Delta\varphi + \pi.$$

$$\varphi_{10} - \varphi_1 = 3\Delta\varphi + 2\pi.$$

Puede demostrarse que la secuencia en la diferencias de fase toma la forma

$$\varphi_{13} - \varphi_1 = 4\Delta\varphi + 3\pi.$$

$$\underbrace{\varphi_{16} - \varphi_1 = 5\Delta\varphi + 4\pi.}_{\vdots}$$

Reemplazando en la expresión original para la función de onda reflejada:

$$\psi_R = e^{i\varphi_1}\left[\psi_1 + \psi_4 e^{i\Delta\varphi} + \psi_7 e^{i(2\Delta\varphi+\pi)} + \psi_{10} e^{i(3\Delta\varphi+2\pi)} + \cdots +\right].$$

La intensidad resultante entre la primera onda reflejada y cualesquiera subsecuentes es:

$$\langle I_R\rangle = \langle I_1\rangle + \langle I_j\rangle + 2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_j\rangle}\cos\left(\varphi_j - \varphi_1\right).$$

Si las ondas **1** y **4** se superponen constructivamente, la diferencia de fase $\Delta\varphi$ es un múltiplo entero de 2π. La función $\cos\left(\varphi_j - \varphi_1\right)$ tendrá siempre valores iguales a ± 1, es decir, la intensidad resultante de dos ondas (con la primera de referencia) exhibe un patrón de interferencia totalmente constructivo o totalmente destructivo. Si la diferencia de fase $\Delta\varphi$ es π, entonces la función $\cos\left(\varphi_j - \varphi_1\right)$ sólo toma valores iguales a -1, es decir, el patrón de

interferencia de dos ondas (con la primera de referencia) es totalmente destructivo. El coeficiente de reflexión resultante puede deducirse considerando los coeficientes de transmisión (τ) y reflexión (ρ) sobre cada superficie de la película [Ver ejercicio **4.156**]. Los subíndices ap y pa indican que los coeficientes deben calcularse desde el aire hacia la película y viceversa.

$$\frac{\psi_1}{\psi_R} = \rho_{ap}, \qquad \frac{\psi_2}{\psi_R} = \tau_{ap}, \qquad \frac{\psi_3}{\psi_R} = \tau_{ap}\rho_{pa},$$
$$\frac{\psi_4}{\psi_R} = \tau_{ap}\rho_{pa}\tau_{pa}\ldots\frac{\psi_7}{\psi_R} = \tau_{ap}\rho_{pa}^3\tau_{pa}\ldots\frac{\psi_{10}}{\psi_R} = \tau_{ap}\rho_{pa}^5\tau_{pa}..$$

La serie se transforma en $[|\rho_{ap}| = |\rho_{pa}| = \rho,\ \ \tau_{ap}\tau_{pa} = 1-\rho^2]$:

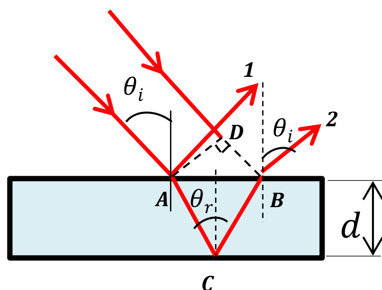
$$\frac{\psi_R}{\psi_I}e^{-i\varphi_1} = \rho_{ap} + \tau_{ap}\tau_{pa}\rho_{pa}\left[e^{i\Delta\varphi} - \rho_{pa}^2 e^{i2\Delta\varphi} + \rho_{pa}^4 e^{i3\Delta\varphi} + \cdots +\right]$$

$$= \rho_{ap} + \frac{\tau_{ap}\tau_{pa}\rho_{pa}e^{i(\Delta\varphi)}}{1+\rho_{pa}^2 e^{i(\Delta\varphi)}} = \rho - \rho\frac{(1-\rho^2)e^{2ikd}}{1-\rho^2 e^{2ikd}},$$

$$\check{r} = \frac{\psi_R}{\psi_I}e^{-i\varphi_1} = \rho\left(\frac{1-e^{2ikd}}{1-\rho^2 e^{2ikd}}\right), \qquad \rho = \left|\frac{1-n}{1+n}\right|,$$

en donde n es el índice de refracción de la película, y $k = 2\pi n/\lambda$. La deducción de la fórmula anterior proviene de calcular el factor de convergencia de la serie asociada a la función ψ_R con las relaciones de amplitudes escritas en términos de los respectivos índices de refracción. El cambio de signo en el coeficiente de reflexión ha sido implícitamente incluido en el factor de fase $\Delta\varphi$. El espectro de reflexión total, al cual puede darse interpretación física, se calcula tomando el cuadrado de la magnitud de la cantidad compleja $\check{r}$: $\mathcal{R} = |\check{r}|^2$.

4.192 **Luz blanca incide sobre una película de 0.50 micras de espesor y $n = 1.595$. Hallar las longitudes de onda de los máximos reflejados en el rango de la región visible (400 nm - 650 nm) cuando el ángulo de incidencia es: (**a**) 30°, (**b**) 60° (**c**) 0°.



R. Se presentará el fenómeno de interferencia totalmente constructiva en la reflexión si la diferencia de fase entre dos rayos es múltiplo entero de 2π [ver ejercicio **4.24**]. El desfase de los rayos que interactúan en $\boldsymbol{B}$ se debe a que los caminos seguidos $\boldsymbol{DB}$ y $\boldsymbol{ACB}$ toman tiempos diferentes. La longitud del segmento $\boldsymbol{AB}$ toma el valor $2d\tan\theta_r$, como se demostró en el ejercicio anterior. En el triángulo rectángulo $\Delta\boldsymbol{ADB}$,$\boldsymbol{DB} = \boldsymbol{AB}\sin\theta_i$. También, $\boldsymbol{ACB} = 2d/\cos\theta_r$.

Los tiempos en cada recorrido son: $t_1 = \boldsymbol{DB}/c$ y $t_2 = n\boldsymbol{ACB}/c$. La diferencia de fase es:

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{\omega}{c}\left(\frac{2nd}{\cos\theta_r} - 2d\tan\theta_r \sin\theta_i\right).$$

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda}\frac{(n - \sin\theta_r \sin\theta_i)}{\cos\theta_r} = \frac{4\pi nd}{\lambda}\frac{(1 - \sin^2\theta_r)}{\cos\theta_r},$$

$$\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda}\cos\theta_r,$$

en donde en la última expresión se ha aplicado la ley de Snell. En términos del ángulo de incidencia:

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}.$$

Si la onda incide desde un medio con índice de refracción menor hacia otro con índice mayor, ésta experimenta un cambio de fase de π rad. Por lo tanto, el cambio de fase efectivo asociado a la reflexión es:

$$\Delta\varphi = \delta - \pi = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i} - \pi.$$

En el caso de interferencia constructiva: $\Delta\varphi = 2\pi m, m$-entero. Las longitudes de onda propias de la reflexión constructiva satisfacen la ecuación:

$$\lambda_m = 4d\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{(2m+1)}.$$

En el rango visible:

- **(a)** $\theta_i = 30°, \lambda_m = 432.7$ nm $(m = 3)$, $\lambda_m = 605.84$ nm $(m = 2)$.
- **(b)** $\theta_i = 60°, \lambda_m = 535.8$ nm $(m = 2)$.
- **(c)** $\theta_i = 0°, \lambda_m = 638$ nm $(m = 2)$, $\lambda_m = 455.71$ nm $(m = 3)$.

4.193 * Una película delgada que tiene un espesor de 2.4 micras y un índice de refracción de 1.4 se ilumina con luz monocromática de longitud de onda 620 nm. Hallar el mínimo ángulo de incidencia para el cual hay un máximo de interferencia (a) constructiva (b) destructiva por reflexión.

R. (a) Utilizando el resultado del Ejemplo anterior, y despejando el ángulo de incidencia:

$$\theta_i(m) = \text{arccsc}\left(\frac{4d}{\sqrt{16d^2n^2 - (2m+1)^2\lambda^2}}\right).$$

El mínimo ángulo de incidencia con respecto a la normal corresponde a 20.32° para un máximo de interferencia de orden $m = 10$. Los otros ángulos para los cuales se presenta interferencia constructiva por reflexión son 42.4° con $m = 9$ y 60.3° con $m = 8$. (b) Interferencia destructiva por reflexión puede inferirse desde la condición $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$,

(i.e. una diferencia de fase como múltiplo entero impar de π) para 32.7° con $m = 9$. Los otros ángulos para los cuales se presenta interferencia destructiva por reflexión son 51.27° con $m = 8$ y 70.83° con $m = 7$. La luz es completamente transmitida si la diferencia de fase debido a la diferencia de recorrido δ es múltiplo entero de 2π. El ángulo mínimo de para el cual se existe interferencia constructiva por transmisión es 32.7° y $\delta = 4\pi d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}/\lambda$.

4.194 *Demostrar que si una placa de vidrio de con índice n_v se cubre con una película delgada que tiene un índice $n_c = \sqrt{n_v}$ y de un espesor igual a un cuarto de la longitud de onda de la luz *en la película*, se observa interferencia destructiva completa entre la luz reflejada en ambas superficies, para incidencia normal. A esta película se le denomina *revestimiento anti reflectivo.*

R. [Ver ejemplo ***4.157***] Si el espesor del revestimiento es $\lambda/4$, entonces la relación de los coeficientes de reflexión sobre las superficies debe satisfacer, en el caso de interferencia destructiva completa:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -e^{-2ikd} = \left(\frac{1-n_c}{1+n_c}\right)/\left(\frac{n_c - n_v}{n_c + n_v}\right) = 1,$$

con $e^{-2ikd} = e^{-i\pi} = -1$. Resolviendo para n_c en la última ecuación,

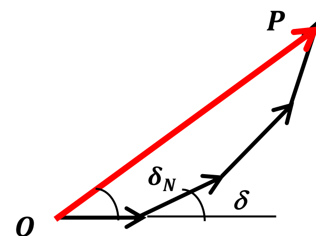
$$n_c + n_v - n_c^2 - n_c n_v = n_c - n_v + n_c^2 - n_c n_v,$$

se obtiene la solución: $n_c = \sqrt{n_v}$.

4.195 *** Considerando la interferencia producida por N fuentes puntuales, [Ver ejemplo ***4.50***] probar que la fase inicial de la onda resultante está dada por $\delta_N = (N-1)\delta/2$, donde δ está dado por $2\pi a \sin\theta/\lambda$. Nótese que δ_N es el ángulo formado por el fasor de la onda resultante con el eje horizontal.

R. La componente vertical del segmento ***OP*** puede escribirse como la suma de las $N-1$ proyecciones de los fasores individuales sobre el eje y, con ángulos $\delta, 2\delta, 3\delta \ldots (N-1)\delta$.

$$(\boldsymbol{OP})_Y = \psi_0 \sum_{j=1}^{N-1} \sin(j\delta) = \psi_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \sin\big((N-1)\delta/2\big).$$



La proyección horizontal del segmento ***OP*** es la suma de las N componentes de los fasores individuales sobre el eje X:

$$(\boldsymbol{OP})_X = \psi_0 \sum_{j=0}^{N-1} \cos(j\delta) = \psi_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos\big((N-1)\delta/2\big).$$

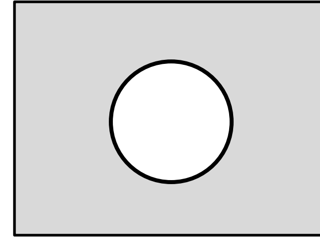
La tangente del ángulo δ_N que forma el segmento ***OP*** con la horizontal se define por:

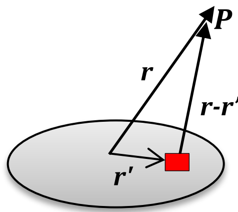
$$\tan \delta_N = \frac{(\boldsymbol{OP})_Y}{(\boldsymbol{OP})_X} = \tan\left[\frac{(N-1)\delta}{2}\right].$$

La función tangente es una función periódica con periodo igual a π. La fase es:

$$\delta_N = \frac{(N-1)\delta}{2} + m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

4.196 **Una onda luminosa plana y monocromática de 500 nm incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura de la forma que se ilustra en la figura. El radio del círculo es 1 mm. Calcular el radio del disco de Airy en términos de la relación de la distancia focal y el diámetro de la abertura, a 2 m de la pantalla.





R. La contribución a la intensidad de la radiación asociada a un elemento de campo eléctrico en $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ puede calcularse desde el diferencial:

$$dE(P) \sim E_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} e^{-i\omega t}$$

En la aproximación de campo lejano, $r >> r'$, con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El vector $\boldsymbol{k}$ posee la dirección del vector $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. Por lo tanto el término

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} = e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \sim \exp[ikr(1 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')/r^2)].$$

El término que contiene la forma estructural S de la abertura es aquel que contiene $\boldsymbol{r}'$:

$$dE(P) \sim E_0 e^{i(kr-\omega t)} \underbrace{e^{-ik(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')/r}}_{S}$$

Integrando sobre los elementos de área:

$$E(P) = \frac{E_0}{S} e^{i(kr-\omega t)} \int e^{-ik(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')/r} dS.$$

Evaluamos la integral sobre la abertura circular completa de a=1 mm de radio:

$$\int e^{-ik(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')/r} dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp[-ik(xr'\cos\varphi + yr'\sin\varphi)/r] r'dr'd\varphi\,.$$

Estas integrales pueden ser consultadas en tablas o en el sitio web:

http://mathworld.wolfram.com/BesselsFirstIntegral.html El resultado es:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \exp[-ik(xr' \cos\varphi + yr' \sin\varphi)/r] r' dr' d\varphi = 2\pi a^2 \frac{J_1(ka\rho/r)}{(ka\rho/r)},$$

En donde $J_1(::)$ es la función de Bessel de primera clase con argumento $(::)$, y $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Si el punto ***P*** se localiza sobre el eje de la abertura, $\rho = 0$ y el límite es:

$$\lim_{w\to 0}\left(\frac{J_1(w)}{w}\right) = \frac{1}{2}.$$

La amplitud del campo en P *debido sólo a la abertura circular* puede calcularse desde:

$$E(P) = \frac{2\pi a^2}{S}\left(\frac{J_1(ka\rho/r)}{(ka\rho/r)}\right) E_0 e^{i(kr-\omega t)}.$$

La intensidad en P es:

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{J_1(ka\rho/r)}{(ka\rho/r)}\right)^2,$$

en donde I_0 corresponde al valor máximo de la intensidad asociada a la fuente. El patrón de difracción proyectado sobre una pantalla a 2 m de la abertura consiste en un disco brillante central y anillos brillantes y oscuros concéntricos alrededor del disco. El tamaño del disco central puede estimarse calculando el valor que satisface la relación $J_1(ka\rho/r) = 0$. El primer cero de la función de Bessel de orden está dado por $ka\rho/r = 3.832$. Tomando $\rho = r\sin\theta$,

$$2a\sin\theta = 1.22\lambda.$$

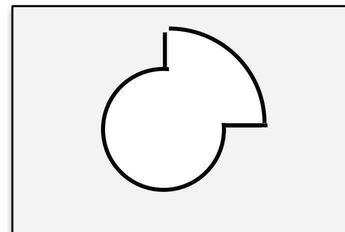
En la aproximación de pantalla lejana, el ángulo subtendido puede calcularse como la relación:

$$\theta \approx \frac{q}{D} = 1.22\frac{\lambda}{(2a)}.$$

Si la distancia focal de la abertura se considera igual a la distancia a la pantalla: $D = f$, entonces el radio del disco es:

$$q = 1.22\lambda\frac{f}{(2a)} = 1.22\lambda \times f/\#$$

En donde $f/\#$ es un *número f.* A dos metros de distancia, $f/\#= 10^3$, por lo tanto el disco de Airy en la pantalla tendrá un diámetro $2a = 1.22$ mm cuando la abertura es iluminada con luz de 500 nm.



4.197* Una onda luminosa plana y monocromática de 500 nm incide perpendicularmente sobre una pantalla opaca que tiene una abertura de la forma que se ilustra en la figura. El radio del círculo interior es de 1 mm y el del radio exterior 1.414 mm. Calcular la amplitud y la intensidad relativas de la perturbación óptica en un punto ***P*** sobre el eje de los círculos a 2 m de la pantalla.

R. Utilizaremos el principio de difracción de Fresnel para obstáculos circulares. El número de zonas de Fresnel n *descubiertas* por la abertura depende del tamaño de la misma, la longitud de onda incidente y la distancia al punto de observación. En la aproximación paraxial [rayos paralelos]:

$$n = \frac{\pi a^2}{\pi \lambda R_O} = \frac{a^2}{\lambda R_O},$$

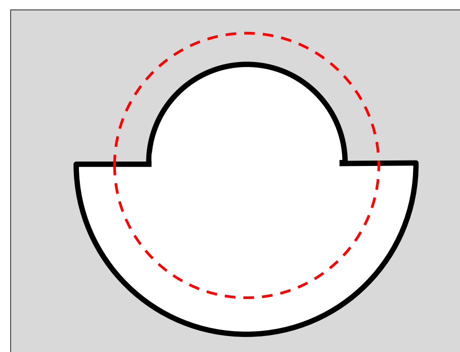
en donde a es el radio de la abertura, R_O la distancia a la pantalla y λ la longitud de onda de la radiación incidente. La amplitud resultante depende del número de zonas completas descubiertas por la apertura. Si n es impar, la contribución a la amplitud resultante es $+2E_0$, siendo E_0 la amplitud de la onda sin obstáculo. Si n es par, la contribución a la amplitud resultante es $-2E_0$,. En este caso, la configuración de la abertura contiene una zona de Fresnel completa para el círculo de 1 mm:

$$n(a = 1 \text{ mm}) = 1,$$

y una cuarta parte de la segunda zona de Fresnel para $n\,(a = 1.41 \text{ mm}) = 2.$ La amplitud resultante puede obtenerse por lo tanto desde la superposición de las contribuciones de las amplitudes para cada zona:

$$E_R = 2E_0 - \left(\frac{1}{4}\right) 2E_0 = \frac{3}{2} E_0 = 1.5E_0.$$

La intensidad en P es $\langle I_R \rangle = 2.25 \langle I_0 \rangle \sim E_R^2$.



4.198 Considere ahora la geometría ilustrada en la figura adjunta, con un radio interior de 1.414 mm y un radio exterior de 2.449 mm. Luz visible de 500 nm incide normalmente sobre la abertura, con una intensidad de 25 W/m². Calcular la intensidad en un punto a 4 m sobre el eje.

R. Para una abertura de 1.414 mm existe una (1) zona completa de Fresnel descubierta. Para un radio de 2 mm se descubrirán 2 zonas completas (línea punteada), mientras que para un radio de

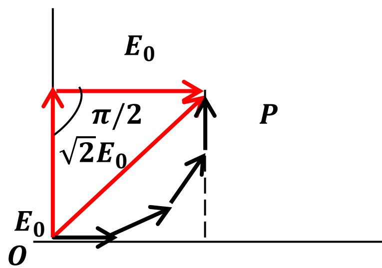
2.449 mm estarán descubiertas tres (3) zonas.

Existirán contribuciones a la amplitud resultante multiplicando por el factor de área y el signo adecuado:

$$E_R = \overbrace{(1)(2E_0)}^{1\ zona} - \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)(2E_0)}^{2\ zona} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)(2E_0)}^{3\ zona} = 2E_0.$$

La intensidad en el punto de observación es $\langle I_P \rangle = 4\langle I_0 \rangle = 100$ W.

4.199 Luz láser de He-Ne (632.8 nm) incide normalmente sobre una abertura circular de 0.7955 mm de radio. Cuál es la intensidad en un punto sobre el eje axial a 2 m de la abertura, en términos de la intensidad de la radiación incidente?.



R. El número de zonas de Fresnel en este caso: $n = 1/2$. La amplitud del campo resultante es $\sqrt{2}E_0$, y la intensidad $\langle I_R \rangle = 2.0\langle I_0 \rangle \sim E_R^2$. Un diagrama de fasores asociado a esta construcción se ilustra en la figura adjunta. La diferencia de fase entre el primer y el último fasor es $\pi/2$ cuando $n = 1/2$, π cuando $n = 1$, etc. El fasor resultante ***OP*** es $\sqrt{2}E_0$, siendo E_0 la amplitud del campo sin obstáculo.

4.200 Una onda luminosa, plana y monocromática de 500 nm incide perpendicularmente sobre una abertura circular de 0.40 cm de diámetro. (a) Determinar los puntos de intensidad máxima y mínima a lo largo del eje de la abertura. (b) A qué distancia de la pantalla se presenta el último mínimo?.

R. (a) Utilizamos la expresión $a^2/n\lambda$ para calcular la posición de los máximos de intensidad si n es impar y la posición de los mínimos si n es par. Los máximos estarán ubicados en 8 m, 2.7 m, 1.6 m, 1.1 m…mientras que los mínimos están en 4 m, 2 m, 1.33 m. Es decir, en ambos casos, según la secuencia $8/n$ (m). (b) El último mínimo (o el más alejado de la pantalla) está localizado a 4 m de la misma.

4.201*Cómo diseñaría Ud. un sistema de doble rendija, con rendijas de 2 micras de ancho, de forma tal que, cuando se ilumina con luz láser de 488 nm, cada otro máximo de interferencia esté deprimido?.

R. (Cfr. Ej. ***4.132***) Para $N = 2$, el patrón de interferencia en el sistema de doble rendija se reduce a:

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha.$$

Los máximos consecutivos de interferencia están definidos por la condición $\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$ Los mínimos de difracción están dados por la condición: $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$ Cada otro máximo de interferencia corresponde a las posiciones (sin tomar el máximo central) $\alpha = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi \ldots$ y éstos deben coincidir con los mínimos de interferencia:

$$\beta = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi \ldots$$

Estas expresiones coinciden cuando $\alpha = 2\beta$, o $a = 2b$. La separación entre los centros de las rendijas debe ser igual al doble de su ancho, i.e., 4 micras.

4.202 Una fuente lineal de 600 nm de longitud de onda se localiza a 2 m desde y paralelamente a una rendija horizontal muy larga de 0.25 mm de ancho. Cuál es la intensidad de la radiación en un punto a 3 m de la rendija?.

R. Utilizamos los resultados del formalismo de difracción de Fresnel para obstáculos rectangulares:

$$\langle I_P \rangle = \frac{\langle I_0 \rangle}{4} \{[C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2\} \times \{[C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2\},$$

con la coordenada horizontal u en los límites $\{-\infty, \infty\}$ y la coordenada vertical v entre $\{-w/2, w/2\}$. La expresión anterior se simplifica como: $(C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm 1/2)$

$$\langle I_P \rangle = 2\langle I_0 \rangle [C^2(w/2) + S^2(w/2)],$$

con

$$w = \left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_O}\right)\right]^{\frac{1}{2}} a,$$

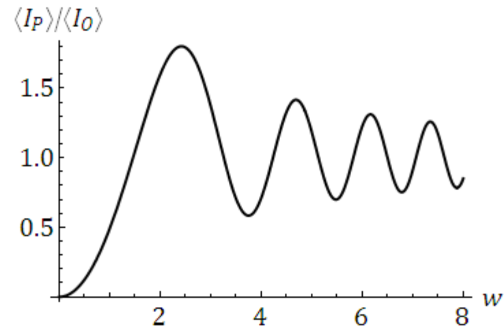
y a como el ancho de la rendija. Numéricamente: $w = 0.42$. Consultando la tabla $C(0.21) \approx 0.21$ y $S(0.21) \approx 0.0048$, la intensidad resultante $\langle I_P \rangle \approx 0.09\langle I_0 \rangle$. Valor exacto $\langle I_P \rangle = 0.0881\langle I_0 \rangle$

4.203 **Determinar el valor máximo posible de la intensidad de la radiación que puede ser medido por un pequeño detector localizado en un punto opuesto en el centro de una rendija muy larga con ancho variable.

R. Utilizamos la expresión obtenida en el ejercicio anterior, para el caso de una rendija muy larga de ancho a:

$$\langle I_P \rangle = 2\langle I_0 \rangle [C^2(w/2) + S^2(w/2)],$$

En donde w es proporcional al parámetro a. La función se maximiza para $w = 2.41876$, con una intensidad $\langle I_P \rangle = 1.80\langle I_0 \rangle$. Este resultado puede obtenerse graficando la función $\langle I_P \rangle / \langle I_0 \rangle$ utilizando los valores de la tabla en la sección **4.7**.



4.204 Escribir una expresión generalizada para la intensidad de la radiación en un punto detrás de una pantalla opaca semi-infinita, extendida en la región $\{0, +\infty\}$

R. Desde la prescripción:

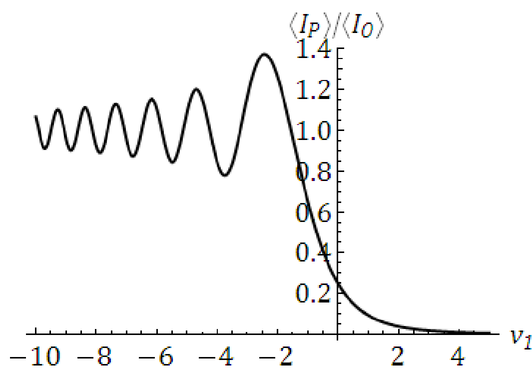
$$\langle I_P \rangle = \frac{\langle I_0 \rangle}{4} \{[C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2\} \times \{[C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2\}.$$

En los límites $C(+\infty) = C(-\infty) = S(+\infty) = S(-\infty) = \pm 1/2$, $C(0) = S(0) = 0$,

$$\langle I_P \rangle = \frac{\langle I_0 \rangle}{4}.$$

Si la pantalla ocupa un espacio $\{-\infty, +\infty\}, \{+y_1, +\infty\}$ con respecto a la fuente, la expresión general para la intensidad en $\boldsymbol{P}$ es:

$$\langle I_P \rangle = \frac{\langle I_0 \rangle}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - C(v_1) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(v_1) \right)^2 \right].$$

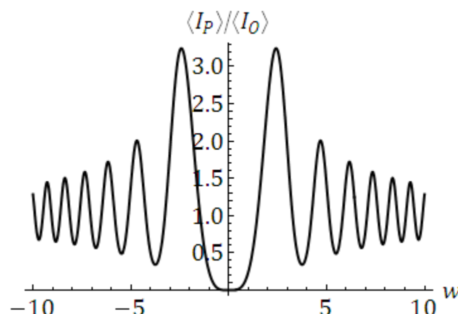


La figura exhibe un perfil del patrón de intensidad en el punto $\boldsymbol{P}$ en función de la posición del obstáculo. Las franjas de difracción son bandas horizontales. Cuando la localización del borde de la pantalla coincide con el eje $y = 0$, la intensidad relativa es 0.25 (1/4). Sobre el eje vertical positivo se detectará una región oscura, mientras que sobre el eje negativo la intensidad tiende al valor de referencia $\langle I_0 \rangle$. El patrón de campo cercano exhibe franjas brillantes alternadas, alcanzando un valor máximo de intensidad igual a $1.37\langle I_0 \rangle$ en $v_1 = -2.43$.

4.205 Una onda plana de 500 nm con intensidad $\langle I_0 \rangle$ incide normalmente en una abertura cuadrada de 2 mm de lado. Un detector de prueba se localiza a una distancia Z en el lado opuesto de la abertura, en un punto sobre el eje que pasa por el centro de la misma. (a)

Determinar la posición y la magnitud del primer máximo de intensidad de la radiación que mediría el detector. (b) Determinar la intensidad a una distancia de 4 m sobre el mismo eje.

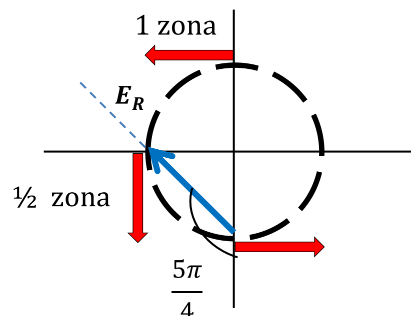
R. (a) En este caso: $\langle I_P \rangle = 4\langle I_0 \rangle [C^2(w/2) + S^2(w/2)]^2$. Al graficar esta función, encontramos que el primer máximo estará en $w = 2.418$ con $\langle I_P \rangle = 3.25\langle I_0 \rangle$. Resolviendo en la aproximación de fuente lejana $w \approx (2/\lambda R_0)^{1/2} a$. La posición del primer máximo de intensidad estará en $R_O = 2.735$ m. (b) a 4 m, $w = 2$, y calculando desde la tabla, $\langle I_P \rangle = 2.56\langle I_0 \rangle$.



4.206 Un disco de vidrio con índice de refracción n (para la longitud de onda λ) cubre una zona y media de Fresnel para el punto de observación ***P***. A qué espesor del disco t la iluminación en ***P*** será máxima?

R. Al interponer un disco de vidrio de espesor t se produce un cambio de fase adicional en el recorrido de las ondas que inciden desde su parte posterior. Explícitamente: $\Delta\phi' = 2\pi t(n-1)/\lambda$. Si el obstáculo cubre 1 y ½ zona de Fresnel, el ángulo de fase del campo ***resultante*** con respecto al fasor de referencia es $5\pi/4$. Incluyendo este factor:

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi t(n-1)}{\lambda} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, \quad m = 0,1,2 \ldots$$

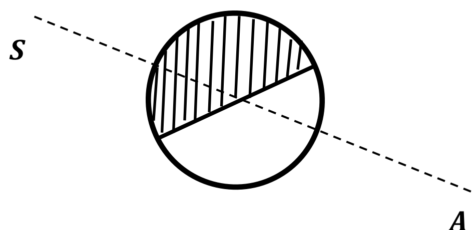


Nótese que el cambio de fase asociado a la presencia del vidrio debe dejar invariable el efecto sobre la intensidad neta producida en ***P***. El espesor que se requiere para cumplir esta condición es:

$$t = \frac{(2m + 5/4)}{2(n-1)}\lambda, \quad m = 0,1,2 \ldots$$

4.207 Entre una fuente puntual ***S*** y el punto de observación ***A*** se ha colocado un disco cuyo centro está en la misma recta que pasa por los puntos ***S*** y ***A***. Una mitad del disco es transparente y la otra, opaca. El disco cubre las tres primeras zonas de Fresnel. El espesor de la parte transparente es $d = N\lambda/[2(n-1)]$, donde n es el índice de refracción del vidrio y N un número entero. Cuál es la intensidad de la radiación en ***A*** con N par y con N impar?.

R. En el caso especial de un vidrio con espesor nulo ($N = 0$) y cuando son descubiertas las tres primeras zonas de Fresnel, un observador en ***A*** registrará una intensidad aproximadamente igual a la intensidad de la radiación incidente sin obstáculo, o zona central *abierta.* Al colocarse vidrio de índice de refracción n y espesor d, éste induce una diferencia de fase igual a $\delta\phi' = kd(n-1) = kN\lambda/2 = N\pi$. La intensidad neta en



A es un máximo (o permanece invariable) si se cumple $N\pi = (3 + 2m)\pi$, $m = -1,0,1,2..$, i.e. El sistema se hace *transparente* para N impar. En el caso de N par, $N\pi = (3 + 2m + 1)\pi$, $m = -1,0,1,2$se obtienen mínimos de intensidad.

4.208* Verificar que la intensidad de la luz reflejada que incide normalmente sobre una superficie de una lente de vidrio, con índice de refracción 1.5, es del orden del 4% de la intensidad de la luz incidente.

R. Procederemos de forma similar al ejemplo ***2.136***. Consideramos las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico [y sus derivadas normales, que corresponden a la componente normal del campo magnético] para una onda plana que interactúa con una frontera perpendicular al eje X:

$$E_1 = E_2.$$

$$\varepsilon_1 v_1^2 \frac{\partial E_1}{\partial x} = \varepsilon_2 v_2^2 \frac{\partial E_2}{\partial x}.$$

El resultado final es obtenido para el coeficiente de reflexión:

$$R = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\varepsilon_1 v_1 - \varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

en donde en la última línea se han utilizado las relaciones $v = c/n$ y $\varepsilon = n^2$. En el caso particular de incidencia desde el vacío hacia un medio con índice de refracción n:

$$R = \frac{1 - n}{1 + n}.$$

El coeficiente de transmisión es

$$T = \frac{2\varepsilon_1 v_1}{\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 v_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

con

$$T = \frac{2}{1 + n},$$

en el caso especial bajo discusión. La relación de las intensidades transmitida e incidente toma la forma explícita:

$$\frac{\langle I_t \rangle}{\langle I_i \rangle} = \frac{n_2}{n_1} T^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Con $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.5$:

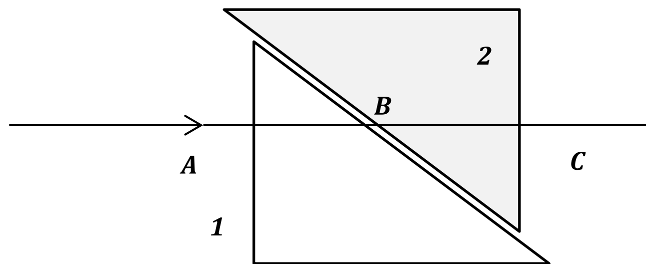
$$\frac{\langle I_t \rangle}{\langle I_i \rangle} = 0.96,$$

el cual indica que el 96% de la radiación incidente sobre la lente se transmite, mientras que el 4% remanente se refleja. Es fácil comprobar que la intensidad de la onda reflejada es

$$\frac{\langle I_r \rangle}{\langle I_i \rangle} = R^2 = 0.04.$$

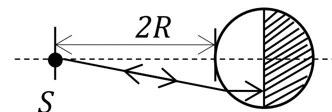
Confrontar este resultado con el ejercicio ***4.141***.

PR 4.6. Un compensador de *Babinet* consiste en dos cuñas de Cuarzo que pueden deslizarse una sobre la otra. Las cuñas están cortadas de tal forma que sus ejes ópticos son perpendiculares, entonces el rayo ordinario en una de ellas es el extraordinario en la otra. Hallar la diferencia de fase que experimenta el rayo en el recorrido ***AC***.



R. El rayo ***AB*** experimenta un cambio de fase en su trayectoria asociado al doble índice de refracción de la cuña **1**: $\delta_1 = \omega(1/v_\parallel - 1/v_\perp)d_1 = \omega(n_e - n_o)d_1/c = 2\pi\Delta n d_1/\lambda$, $\Delta n = n_e - n_o$, en donde $d_1$es la longitud del segmento $\overline{AB}$, $v_\perp = c/n_o$ es la velocidad de propagación de la onda *paralela* al eje óptico y $v_\parallel = c/n_e$ la velocidad de la onda *perpendicular* al eje óptico. Los parámetros n_o y n_e corresponden a los índices ordinario (o) y extraordinario (e), y un material puede catalogarse con birrefringencia uniaxial positiva o negativa dependiendo del signo de Δn. En el caso del Cuarzo, $n_e = 1.5534$, $n_o = 1.5443$ (tomados con luz de Sodio de 589 nm) y $\Delta n > 0$. El rayo (o) viaja paralelo al eje óptico, con velocidad mayor que la del rayo (e), perpendicular a (o) y la diferencia de fase será positiva. La polarización del haz incidente en la cuña **2** cambia debido a la rotación de su eje óptico, permitiendo, por efectos de continuidad en la superficie de separación entre los medios, que el rayo (e) del medio **1** se propague en dirección paralela al eje óptico del medio **2**. La velocidad del haz que se propaga sobre este eje es por lo tanto c/n_e, y con un argumento similar $\delta_2 = \omega(n_o - n_e)d_2/c$, con d_2 como la longitud del segmento $\overline{BC}$. El cambio de fase total es $\delta = \delta_1 + \delta_2 = \omega(n_e - n_o)(d_1 - d_2)/c$. La diferencia de fase puede ajustarse deslizando una cuña sobre la otra.

4.209 Una esfera sólida de vidrio cuyo radio es R y cuyo índice de refracción es 1.50, tiene un hemisferio plateado como se ilustra en la figura. Se coloca un pequeño objeto sobre la recta que pasa por el centro de la esfera y el polo del hemisferio a una distancia $2R$ del polo no plateado. Hallar la posición de la imagen final.

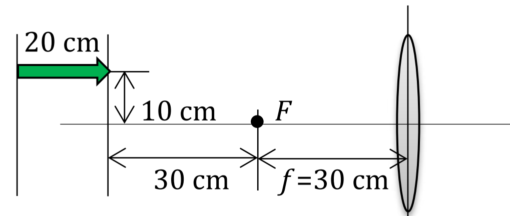


R. La imagen producida por el hemisferio de vidrio estará localizada según la ecuación;

$$\frac{1}{s_I}+\frac{1}{s_O}=\frac{1}{f_v},$$

en donde $f_v = R/(n-1)$ es la distancia focal del hemisferio, con $R_1 = +R$, $R_2 \to \infty$ en la convención usual para las lentes esféricas. La posición de la imagen es $s_I = R/(n-3/2)$. Con $n = 3/2$, $s_I = \infty$, i.e. la imagen se formará en el *infinito*, los rayos que ingresan al hemisferio de vidrio son paralelos al eje y la ubicación del objeto coincide con la distancia focal del hemisferio. Cuando alcanzan la superficie plana, los rayos se reflejan cambiado en dirección paralela al eje, el objeto que los produce pareciera ahora que estuviese en el *infinito* y su imagen se formará en el foco del hemisferio de vidrio, i.e. a una distancia $2R$ desde el vértice. La posición S coincide con la posición final de la imagen.

4.210 Calcular las posiciones de las imágenes formadas en la lente por los extremos de la flecha y obtener su magnificación relativa.

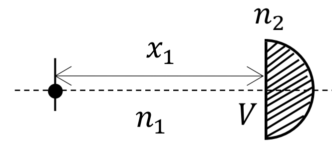


R. Definimos la posición de cada extremo como s_O, s_O' medidas desde el centro de la lente. Las imágenes asociadas a estas posiciones se denotan respectivamente por s_I, s_I'. Desde la ecuación para las lentes, el tamaño de la imagen formada es:

$$\Delta s_I = s_I' - s_I = -\frac{f^2 \Delta s_O}{(s_O' - f)(s_O - f)},$$

con $\Delta s_O = s_O' - s_O = +20$ cm. El tamaño relativo $\Delta s_I/\Delta s_O = -0.6$. La punta de la flecha estará a $s_I = 60$ cm a la derecha de la lente, su extremo final estará ubicado en $s_I' = 48$ cm.

4.211 Una sustancia en forma de hemisferio de radio R e índice de refracción n_2 está sumergida en un medio de índice refracción n_1 como se muestra en la figura. Se coloca un objeto sobre el eje a una distancia x_1 desde el centro. Hallar la posición de la imagen x_2 desde el centro en la aproximación de lente delgada.



R. En la aproximación de lente delgada delgada o $x_1 \gg R$,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2-R}=\frac{1}{f},$$

con x_2 medido desde el vértice V. La distancia focal de este dispositivo es $f = n_1 R/(n_2 - n_1)$.

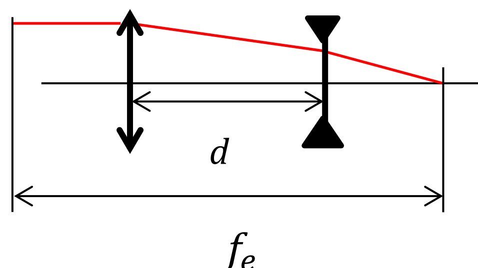
4.212 Una lente de una cámara consiste en una lente convergente frontal con distancia focal f_1 y una lente posterior divergente (distancia focal $-f_2$). (a) Calcular la distancia de la imagen desde la lente divergente. (b) Calcular la longitud focal efectiva de los lentes.

R. (a) La imagen formada por la primera lente toma

el rol de objeto en la segunda. Si los rayos son paraxiales provenientes desde el infinito, la primera imagen estará ubicada en el foco f_1, tomando el papel del *objeto* para la lente divergente a una distancia $d - f_1$. La imagen estará ubicada en

$$s_I = -\frac{(d - f_1)|f_2|}{(d - f_1 + |f_2|)},$$

medida desde la segunda lente. Esta posición depende de las distancias relativas entre las lentes y los focos, y coincide con la llamada distancia focal posterior (*back focal length*) (**b.f.l.**) (b) $f_e = |s_I|$.



4.213 Considere el sistema de lentes del ejemplo anterior, para una distancia focal $f_1 = 12$ cm, $f_2 = -10$ cm. Un objeto de 1 cm de altura se ubica a 25 cm a la izquierda de la primera lente. Hallar la posición final de la imagen y su altura.

R. La imagen producida por la primera lente estará ubicada a 23.1 cm a la derecha. La distancia objeto de la lente divergente es 26.9 cm y su imagen estará a -7.29 cm (i.e. a la izquierda de la segunda lente.) La magnificación total del sistema compuesto es el producto de la magnificación de cada lente

$$M_T = M_1 M_2 = \left(-\frac{s_{I1}}{s_{O1}}\right)\left(-\frac{s_{I2}}{s_{O2}}\right) = \left(-\frac{23.1}{25}\right)\left(+\frac{7.29}{26.9}\right) = -0.250.$$

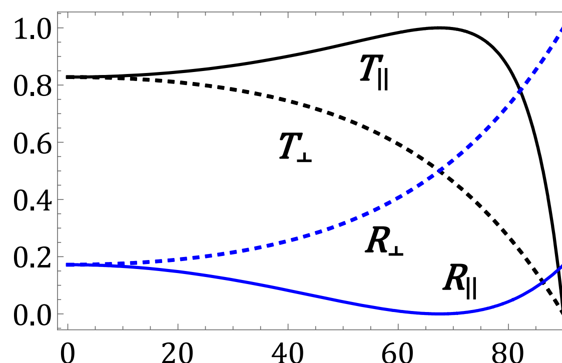
La imagen es invertida, virtual y reducida (-0.250 cm).

4.214 Las ecuaciones que describen la transmisión y reflexión de la luz en la frontera entre dos dieléctricos se conocen como ecuaciones de ***Fresnel.*** Las relaciones de la potencia transmitida a la potencia incidente para la luz polarizada sobre y perpendicular al plano de incidencia son denotadas por $T_\parallel$ y $T_\perp$, respectivamente. Similarmente, para las potencias reflejadas $R_\parallel$ y $R_\perp$. Estas relaciones están dadas por:

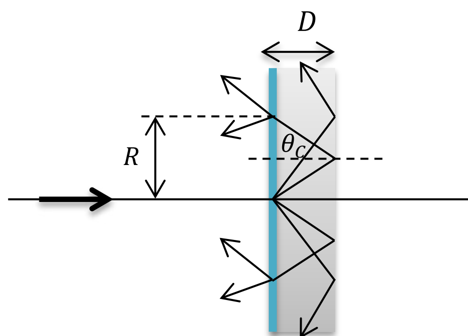
$$T_\parallel = \frac{N_3}{(D_2)^2}, \qquad T_\perp = \frac{N_3}{(D_1)^2}, \qquad R_\parallel = \left(\frac{N_2}{D_1}\right)^2, \qquad R_\perp = \left(\frac{N_1}{D_1}\right)^2,$$

con $N_1 = n_1 \cos\theta_1 - \rho$, $N_2 = n_2 \cos\theta_1 - (n_1/n_2)\rho$, $N_3 = 4n_1\rho\cos\theta_1$, $D_1 = n_1\cos\theta_1 + \rho$, $D_2 = n_2\cos\theta_1 + (n_1/n_2)\rho$ y $\rho = (n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1)^{1/2}$. Utilizar un programa de computador para describir los coeficientes de transmisión y reflexión en la interface aire-diamante.

R. En la figura adjunta se ilustran las respuestas de los diferentes coeficientes de transmisión y reflexión desde las fórmulas de Fresnel, para la interface aire diamante con índice 2.147, en función del ángulo de incidencia. Para ángulos menores de 15° (aproximadamente), la transmitancia para ambos tipos de polarizaciones es del orden del 80%, mientras que las reflexiones son del orden del 20%. Esto significa que para este rango de incidencia, el diamante se comporta de manera casi transparente. Para ángulos cercanos a 90° (o incidencia rasante), las componentes de reflexión tienden a crecer, mientras que la transmisión de la luz tiende a cero. En una región de ángulos intermedios (20°-80°) predomina la componente de transmisión, presentándose una transmitancia máxima (100%) cuando la polarización de la luz es paralela al plano de incidencia en un ángulo de 67.52 °.



4.215 Considere una lámina de vidrio con índice de refracción n cubierta con una capa delgada de papel húmedo. Cuando un haz de luz incide normalmente sobre el papel, un patrón circular distintivo es formado sobre la superficie del papel. La región oscura alrededor del área central ocurre debido a que la luz dispersada desde la superficie frontal es capaz de escapar desde el vidrio en la superficie posterior. Sin embargo, la luz que incide sobre la superficie posterior a un ángulo mayor que el ángulo crítico se refleja hacia la superficie frontal donde escapa y se dispersa en el papel húmedo, formando un área brillante. (a) Demostrar que el radio del anillo brillante está dado por $R = 2D/\sqrt{n^2-1}$. (b) Calcular el índice de refracción de una placa de vidrio de 0.5 cm de espesor si el diámetro del anillo brillante es 2.42 cm.



R. (a) Los rayos reflejados desde la cara posterior de la placa de vidrio sobre la capa de papel alcanzan una distancia vertical R desde el eje horizontal, definida por:

$$R = 2D\tan\theta_C = 2D\frac{\sin\theta_C}{\cos\theta_C}.$$

La condición de ángulo crítico exige que se cumpla $n\sin\theta_C = 1,\ \cos\theta_C = \sqrt{1-1/n^2}$.

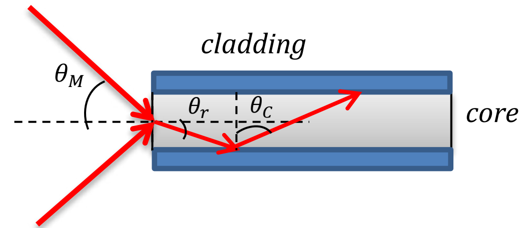
y

$$R = \frac{2D}{\sqrt{n^2-1}}.$$

(b) $n = 1.297$.

4.216 Una fibra óptica se compone de cilindros concéntricos. El revestimiento (*cladding*) externo posee un índice de refracción *menor* que el cilindro interior (*core*). Demostrar que el ángulo medio del cono de aceptación está dado por $\sin\theta_M = (n_{core}^2 - n_{clad}^2)^{1/2}$.

R. El ángulo de aceptación es el ángulo máximo para el cual la luz ingresa al *core* de la fibra y logra propagarse en el interior. Utilizando la ley de Snell y el concepto de reflexión total interna:



$$\sin\theta_M = n_{core}\sin\theta_r.$$

$$n_{core}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_r\right) = n_{core}\sin\theta_C = n_{clad}.$$

$$\cos\theta_r = \frac{n_{clad}}{n_{core}}.$$

$$\sin\theta_M = n_{core}\sqrt{1-\left(\frac{n_{clad}}{n_{core}}\right)^2} = \sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2}.$$

4.217 Cierta fibra óptica multimodal posee un índice de refracción $n_{core} = 1.465$. Cuando la fibra se llena de luz y una pantalla se mantiene a $d = 15$ cm al frente de la misma, aparece un círculo de luz con un diámetro $D = 6.20$ cm. (a) Calcular el índice del revestimiento de la fibra.

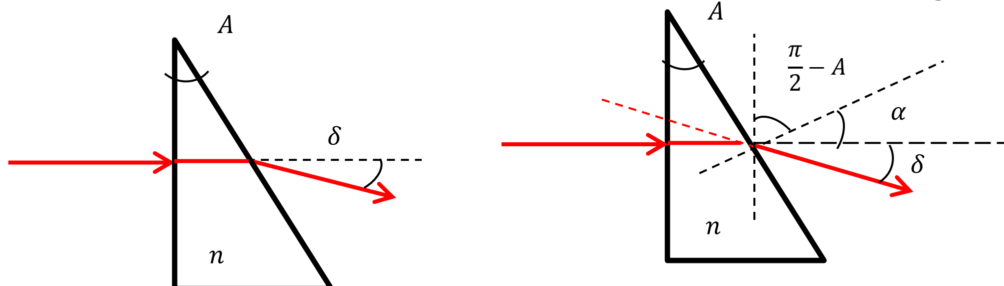
R. Utilizando el resultado del ejercicio anterior y trigonometría simple:

$$\frac{D}{2d} = \tan\theta_M = \sqrt{\frac{n_{core}^2 - n_{clad}^2}{1 - n_{core}^2 + n_{clad}^2}},$$

$$n_{clad} = \sqrt{\frac{4d^2 n_{core}^2 + D^2(n_{core}^2 - 1)}{D^2 + 4d^2}} = 1.45095.$$

4.218 Demostrar que si un rayo incide normalmente sobre una cara de una cuña, el ángulo de desviación está dado aproximadamente por $\delta = A(n-1)$, para pequeños valores de A. Cfr. Ej. ***4.31, 4.86.***

R. Ilustración detallada de la desviación angular.



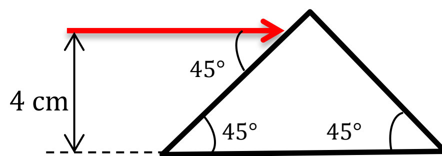
Aplicando la ley de Snell, $n\sin\alpha = \sin(\alpha + \delta)$. La relación con el ángulo del prisma es:

$$\frac{\pi}{2} - A + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = A.$$

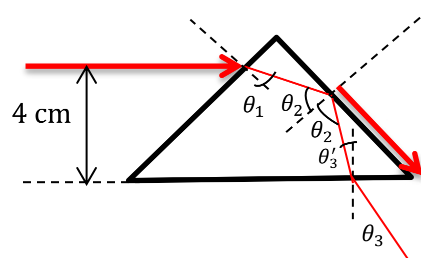
En la expresión anterior: $n \sin A = \sin(A + \delta)$. En la aproximación de ángulo de prisma pequeño: $\sin A \approx A$; $nA \approx A + \delta$;

$$\delta \approx A(n - 1).$$

4.219 Describa la trayectoria del haz a través del prisma ($n = 1.45$) mostrado en la figura, cuando éste incide sobre las tres superficies.



R.



Los ángulos de refracción en el interior del prisma se definen a través de la ley de Snell:

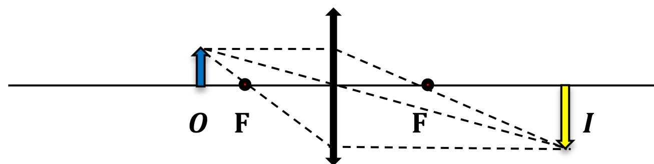
$$\sin 45° = 1.45 \sin \theta_1, \quad \theta_1 = 29.18°, \quad \theta_2 = 60.82°, \qquad \theta_3' = 15.82°, \qquad \theta_3 = 23.28°.$$

El ángulo crítico prisma-aire en la cara lateral derecha del dispositivo es 43.6°(<60.82°), y por lo tanto la luz se propagará con reflexión total interna sobre la misma.

4.220 Un objeto es colocado en las siguientes posiciones desde una lente convergente de 35 cm de distancia focal: (a) 50 cm (b) 30 cm (c) 15 cm. Establecer la posición de la imagen, su magnificación y carácter (real o virtual).

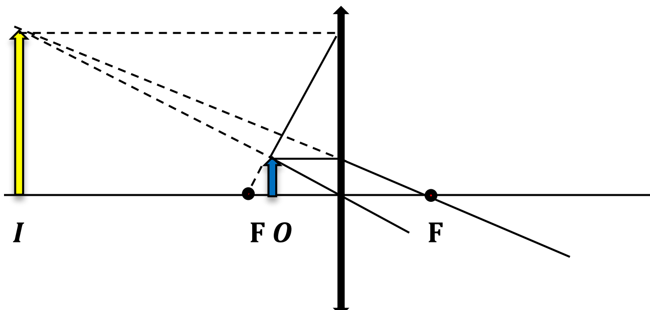
R.

(a)



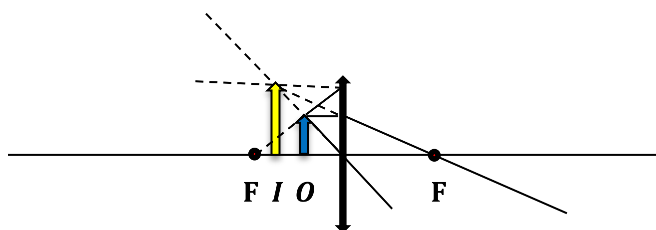
Un objeto situado a 50 cm de la lente convergente tendrá una imagen a 116.7 cm desde la misma, real, invertida y estará 2.3 veces magnificada.

(b)



Un objeto situado a 30 cm de la lente convergente tendrá una imagen a -210 cm desde la misma, virtual, derecha y estará 7 veces magnificada.

(c)

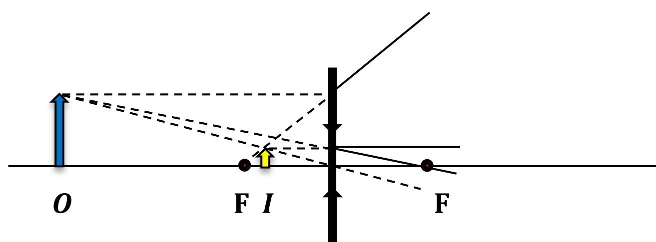


Un objeto situado a 15 cm de la lente convergente tendrá una imagen a -26.25 cm desde la misma, virtual, derecha y estará 1.75 veces magnificada.

4.221 Un objeto es colocado en las siguientes posiciones desde una lente convergente de 35 cm de distancia focal: (a) 50 cm (b) 30 cm (c) 15 cm. Establecer la posición de la imagen, su magnificación y carácter (real o virtual).

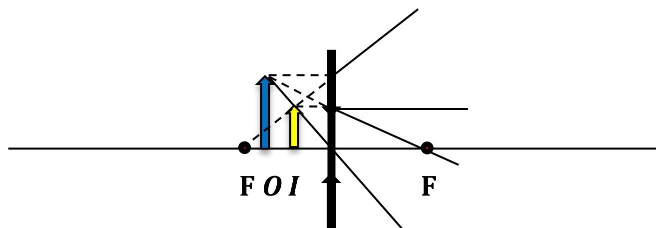
R.

(a)



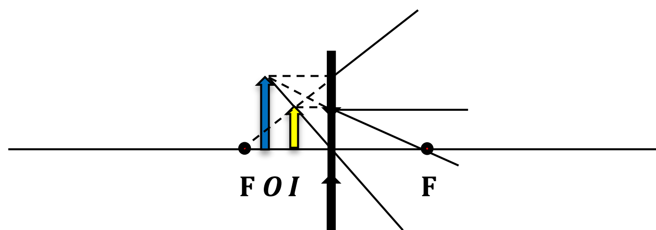
Un objeto situado a 50 cm de la lente divergente tendrá una imagen a 20.58 cm desde la misma, virtual, derecha y estará disminuida en un factor de 0.412.

(b)



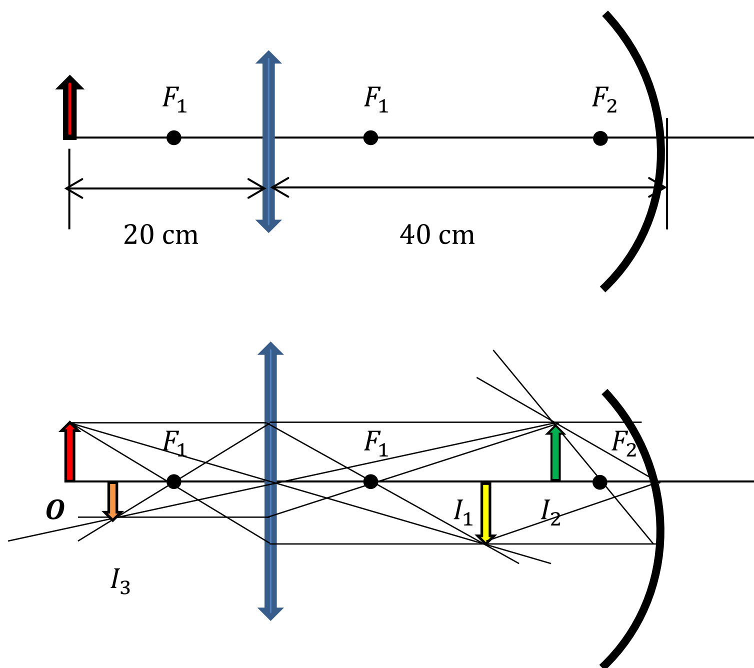
Un objeto situado a 30 cm de la lente divergente tendrá una imagen a 16.15 cm desde la misma, virtual, derecha y estará disminuida en un factor de 0.54.

(c)



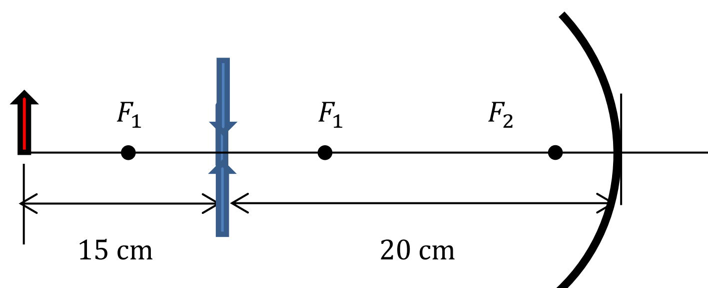
Un objeto situado a 15 cm de la lente divergente tendrá una imagen a 10.5 cm desde la misma, virtual, derecha y estará disminuida en un factor de 0.7.

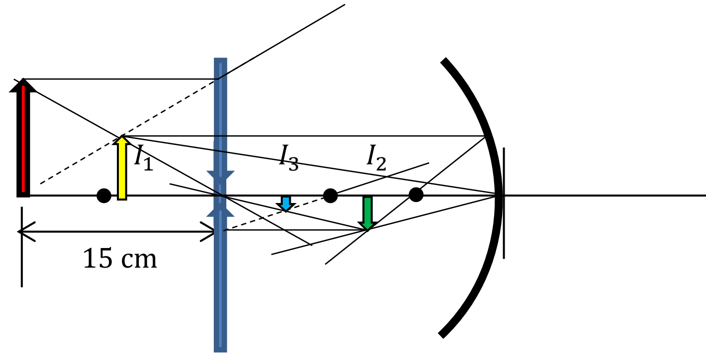
4.222 Una lente biconvexa ($f_1 = 10$ cm) está localizada a 40 cm al frente de un espejo cóncavo ($f_2 = 7.50$ cm) como se ilustra en la figura. Un objeto de 2 cm de altura se ubica a 20 cm a la izquierda de la lente. Calcular las posiciones de las tres imágenes formadas (a) la imagen formada por la lente cuando el rayo viaja hacia la derecha, (b) la imagen formada por la reflexión en el espejo, (c) la imagen final después que los rayos viajeros hacia la izquierda retorna a la lente.



R. (a) La imagen I_1 está localizada a 20 cm a la derecha de la lente, real e invertida, 2 cm de altura (magnificación 1). (b) La imagen I_2 estará a 12 cm del espejo, derecha, real de 1.2 cm de altura (magnificación 0.6). (c) La imagen I_3 estará a 15.55 de la lente, real, invertida de 0.67 cm de altura (magnificación 0.333).

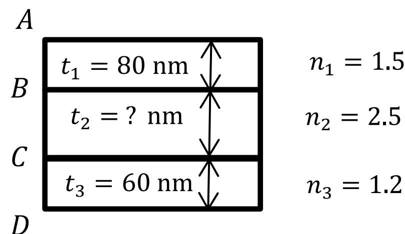
4.223 Una lente bicóncava ($f_1 = -25$ cm) está localizada a 20 cm de un espejo cóncavo ($f_2 = 5$ cm) como se ilustra en la figura. Un objeto de 2 cm de altura está ubicado a 15 cm a la izquierda de la lente. Hallar la ubicación de las tres imágenes formadas.





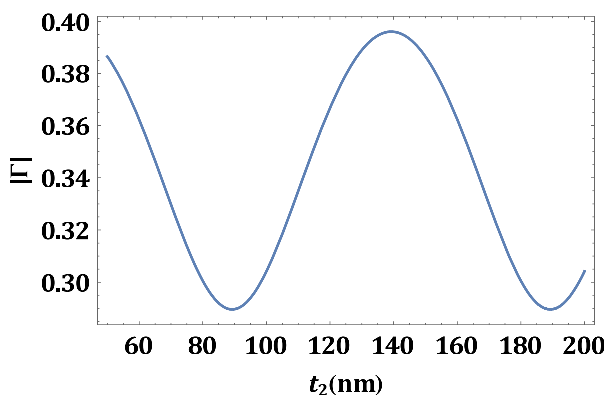
R. Imagen 1: -9.375 cm, virtual, derecha y 1.25 cm de altura. Imagen 2: I_1 actúa como objeto y está ubicado a 29.375 cm del espejo, formando una imagen I_2 a 6.026 cm del espejo, invertida y 0.26 cm de altura. Imagen 2 se localiza a 13.974 cm de la lente, creando una imagen virtual I_3, invertida a 8.96 cm a la derecha de la lente, de 0.17 cm de altura.

4.224** Luz monocromática de 500 nm incide normalmente sobre una película dieléctrica de tres capas rodeada de aire, como se ilustra en la figura. Cuál es el espesor mínimo t_2 si se observa un mínimo de radiación el sistema?.



R. (a) Utilizamos una extensión del ejemplo ***4.157*** desde la fórmula de recurrencia para las reflexión de los campos en la i-ésima superficie:

$$\Gamma_i = \frac{\rho_i + \Gamma_{i+1} e^{-2ik_i t_i}}{1 + \rho_i \Gamma_{i+1} e^{-2ik_i t_i}},$$

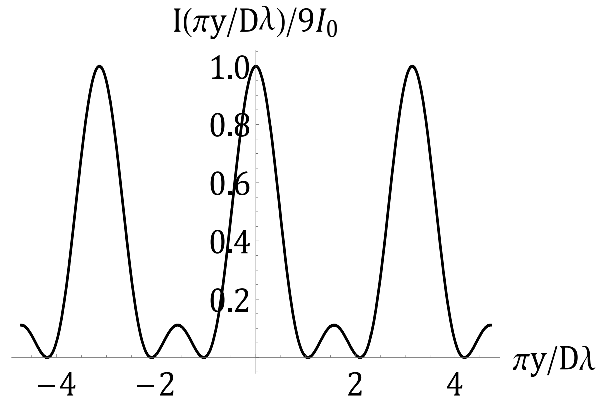


con los coeficientes $\rho_1 = (n_{aire} - n_1)/(n_{aire} + n_1)$, $\rho_2 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$, $\rho_3 = (n_2 - n_3)/(n_2 + n_3)$, $\rho_4 = (n_3 - n_{aire})/(n_3 + n_{aire}) = \Gamma_4$, con $k_i = 2\pi n_i/\lambda$. Numéricamente, se detecta un mínimo de reflexión para una película de unos 89.6 nm. http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/ch06.pdf

4.225 Cierta cámara de visión nocturna es sensitiva a longitudes de onda de 10.6 μm. El diámetro efectivo de una lente fotográfica de Germanio es 12 cm. A qué distancia puede la cámara resolver dos personas separadas en 3 m? R. Utilizamos la fórmula para el límite de resolución (Cfr. ***4.121***) $\Delta\theta = 1.22\lambda/d = s/R$, en donde s es la separación entre las personas, d es diámetro de la lente y R es la distancia a la lente. Calculando $R = 27.8$ km.

4.226 Tres aberturas separadas 0.6 mm entre sí están iluminadas por un rayo de luz de 500 nm. (a) Hallar las posiciones de los dos primeros mínimos de interferencia en una pantalla localizada a D = 50 cm del sistema de aberturas. (b) Escribir una ecuación para la intensidad promedio en cualquier punto de la pantalla.

R. (a) Utilizamos la definición del ejercicio ***4.50***. Los primeros mínimos están ubicados según $N\delta/2 = \pi, 2\pi \ldots$, N es el número de aberturas y $\delta = 2\pi a \sin\theta/\lambda$, con a como la separación entre ellas. Si $N = 3$, el primer mínimo en la pantalla está localizado en $y_1 = D\lambda/3a = 0.14$ mm, y el segundo mínimo en $y_2 = 2D\lambda/3a = 0.28$ mm; con las distancias verticales medidas desde el centro de la pantalla.



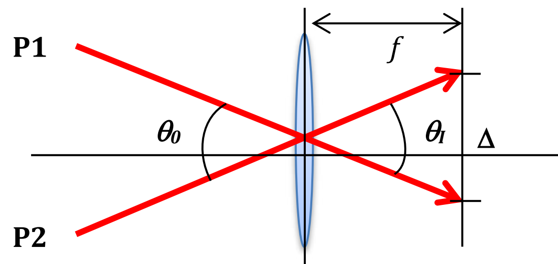
(b) En cualquier punto sobre la pantalla, la intensidad de la radiación es:

$$I_P(y) \sim \left[\frac{\sin\left(\frac{3\pi y}{D\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{D\lambda}\right)}\right]^2.$$

4.227 Una lente circular convergente, con diámetro $d = 30$ mm y distancia focal $f = 25$ cm, forma una imagen que provienen de objetos puntuales distantes en el plano focal de la lente. La longitud de onda es 565 nm. Considerando la difracción producida por la lente, (a) calcular la separación angular de los objetos puntuales de forma que se cumpla el principio de Rayleigh. (b) Cuál es la separación entre los centros de las imágenes en el plano focal?.

R. (a) Nótese que la separación angular de los rayos provenientes de los objetos es igual a la separación angular de los rayos de las imágenes. Si las imágenes deben satisfacer el criterio de Rayleigh, entonces:

$$\theta_0 = \theta_I = \theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = 2.30 \times 10^{-5}\text{rad}$$



(b) En la aproximación de ángulo pequeño: $\Delta \approx f\theta_I = 5.7\ \mu$m.

BANCO DE PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. Un movimiento armónico simple (M.A.S.) se caracteriza porque:

A) Su energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de movimiento.
B) Su amplitud decae exponencialmente en el tiempo.
C) El periodo de movimiento **no** es constante.
D) La velocidad y posición del cuerpo oscilan en fase.

2. Si la constante de amortiguamiento en un sistema amortiguado es $\gamma = \ln 2$, y el periodo de oscilación es $T = 1$ s, la amplitud de oscilación después dos (2) segundos disminuye en un:

A) **75** %
B) **50 %**
C) **66.6**%
D) **25%**

3. Si la fuerza externa sobre un oscilador forzado con amortiguamiento es de la forma $F_0 \cos(\omega t)$, entonces su diferencia de fase con la posición instantánea del cuerpo $x\,(t)$ en resonancia es:

A) $\mathbf{0}$
B) $\boldsymbol{\pi/2}$
C) $\boldsymbol{\pi}$
D) $\boldsymbol{\pi/4}$

4. Si el periodo de un sistema masa-resorte reduce su valor a la mitad de su valor inicial, entonces su masa *M:*

A) Aumentó en el doble.
B) Aumentó cuatro veces.
C) Disminuyó a la mitad.
D) Disminuyó en una cuarta parte.

5. En un sistema masa resorte, si la constante elástica de un resorte aumenta su valor al doble, conservando su masa, el periodo del sistema aumenta en:

A) 25%
B) 41.42%
C) 50%
D) Ninguna de las anteriores.

6. Si la constante γ de amortiguamiento en un sistema es $\omega_0/4$, el factor de calidad Q toma el valor de:

A) 4
B) 0.5
C) 2
D) 0.25

7. La ecuación $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi)$ representa:

A) Una función de onda independiente del tiempo.
B) Una onda que avanza en sentido positivo de x.
C) Una onda cuya elongación inicial $(t = 0)$, es $y = A$.
D) Una onda que avanza en sentido negativo de x.

8. Un vibrador produce una onda en la superficie del agua cada 0.5 s. Estas ondas tienen una longitud de onda de 3 cm y su velocidad en cm/s es:

A) 1.5
B) 3.0
C) 4.5
D) 6.0

9. Dos ondas que poseen igual amplitud y frecuencia dan origen a una onda estacionaria, si éstas interfieren:

A) Perpendicularmente
B) Con igual velocidad pero de sentido opuesto.
C) Con diferente longitud de onda
D) Con diferente frecuencia angular.

10. Indicar la afirmación **INCORRECTA**:

A) Las ondas sonoras en gases son de carácter longitudinal.
B) La intensidad promedio transmitida por una onda sonora es proporcional al cuadrado del cambio de presión Δp.
C) El movimiento de una partícula en una onda mecánica transversal es paralelo a la dirección de propagación de la onda.
D) Las ondas mecánicas transportan ***momentum*** y energía sin transporte de masa.

11. Considere un experimento de difracción de la luz de Fraunhofer para una ranura simple de ancho a. El ancho del máximo central se puede definir como 2θ, en donde θ es el ángulo que determina la posición del mínimo a un lado del máximo central. El ancho angular 2θ para el caso $a = 2\lambda$ es:

A) 60°
B) 15°
C) 30°
D) 45°

12. Un Tesla (1 T), la unidad de intensidad del campo magnético en el sistema MKSC, es también equivalente a:

A) **1 V/m.s**
B) **1 V.s/m²**
C) **1 V.m/s**
D) **1 V. s²/m**

13. El principio de Fermat en óptica establece que:

A) La localización de los mínimos de difracción en un experimento con una rendija de ancho a es proporcional a λ (longitud de onda de la luz incidente).
B) Los índices de refracción de los materiales ópticos son positivos.
C) El tiempo de recorrido de un rayo de luz es mínimo.
D) La distancia focal en un espejo esférico corresponde a la mitad de su radio de curvatura.

14. Una señal electromagnética se describe a través de sus componentes: $E_1 = E_0 \sin(kx - \omega t)$ y $E_2 = E_0 \sin(kx - \omega t + \pi)$. La amplitud de la onda resultante es:

A) 0
B) **$2E_0$**
C) **E_0**
D) **$E_0/2$**

15. La velocidad de propagación de una onda sonora en un gas ideal a temperatura T es proporcional a:

A) **$1/T$**
B) **$1/T^{1/2}$**
C) **T**
D) **$T^{1/2}$**

16. Si la amplitud del oscilador armónico forzado con una constante de amortiguamiento b disminuye a la mitad de su valor en resonancia, entonces b debe multiplicarse por un factor de

A) $\sqrt{2}$
B) **½**
C) **2**
D) **¼**

17. Una onda sonora con un nivel de intensidad de 10 dB posee una intensidad promedio igual a: (en términos de $\mathbf{I_0}$, el nivel de referencia auditiva)

A) **I_0**

B) **0.1 I_0**
C) **10 I_0**
D) **0.01 I_0**

18. Una onda estacionaria en una cuerda de longitud L se propaga a lo largo del eje X con velocidad V, número de onda **k**, y oscila en la **frecuencia fundamental** de vibración f. La distancia entre Nodos y Antinodos consecutivos está definida por:

A) $\pi/2k$
B) $2\pi/k$
C) π/k
D) $3\pi/2k$

19. La longitud de onda de cierta luz visible en el azul tiene un valor aproximado de 460 nm. La frecuencia de esta onda (f) en el vacío corresponde a:

A) 6.52×10^{14} Hz
B) 1.533×10^{-15} Hz
C) 6.52×10^{-14} Hz
D) 1.38×10^{2} Hz

20. Si la potencia de una fuente de luz se incrementa en un 50%, la amplitud del campo eléctrico asociado a su onda electromagnética aumenta aproximadamente en un factor de:

A) **50 %**
B) **125%**
C) **100%**
D) **22.5%**

21. Luz coherente de longitud de onda λ incide sobre un dispositivo de dos ranuras muy delgadas separadas una distancia d. El valor mínimo de la distancia d para la cual **no** se observan franjas oscuras es:

A) $3\lambda/2$
B) λ
C) 2λ
D) $\lambda/2$

22. Si una fuente luminosa puntual se localiza a una distancia R de un espejo esférico de radio de curvatura $R/2$, su imagen estará localizada a una distancia desde el vértice del espejo igual a:

A) $R/3$
B) R
C) $R/2$
D) $3R$

23. El Factor de Calidad Q para un oscilador en el régimen críticamente amortiguado corresponde a:

A) $Q = 0$
B) $Q = 1.5$
C) $Q = 1$
D) $Q = 0.5$

24. Cuando la energía de un oscilador amortiguado se disipa en un 50% del valor inicial, con $\gamma = 1$, entonces el tiempo transcurrido es igual a:

A) $\frac{1}{2}\ln(2)$
B) $2\ln(2)$
C) $\frac{1}{2}\ln(0.5)$
D) $2\ln(0.5)$

25. Un rayo de luz incide sobre una superficie plana que separa dos hojas de vidrio cuyos índices son 1.80 y 1.52. El ángulo de incidencia es de 29°, y se origina en el vidrio de mayor índice. El ángulo de refracción es:

A) 90°
B) 35.0°
C) 47.6°
D) 24.2°

26. Una onda electromagnética de longitud de onda en el vacío λ_0, incide normalmente sobre una película muy delgada de índice de refracción n y espesor t. Si la onda se refleja fuertemente en la película, la longitud de onda mínima dentro de la película debe ser:

A) 0
B) $2t$
C) $2t/n$
D) $2t/n^2$

27. Si la amplitud de un movimiento ondulatorio se duplica, su energía promedio se multiplica en un factor de:

A) 2
B) ½
C) 4
D) ¼

28. Un objeto ejecuta M.A.S con un periodo T y amplitud A. Inicialmente el objeto se encuentra en $x = 0$ y tiene una velocidad en la dirección positiva. El tiempo que tarda el cuerpo en viajar desde $x = 0$ a $x = A/2$ es:

A) $T/2$

B) $T/4$
C) $T/12$
D) $T/8$

29. La relación entre el periodo de oscilación de un péndulo simple de longitud L y un péndulo físico que consiste en una barra rígida homogénea, muy delgada, de la misma longitud y que oscila alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos, es:

A) 1
B) $1/2$
C) $\sqrt{2/3}$
D) $\sqrt{3/2}$

30. Un resorte de masa M, longitud L y constante elástica K cuelga de un pivote sin fricción en su posición de equilibrio bajo los efectos de la fuerza gravitacional. Si el resorte se estira una pequeña distancia z y luego se libera, éste presenta oscilaciones armónicas con una frecuencia f igual a:

A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$
B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3K}{2M}}$
C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{3M}}$
D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3K}{M}}$

31. El valor **promedio** de la potencia transferida a un oscilador forzado SIN amortiguamiento es:

A) $\mathbf{0}$
B) $\frac{F_0 A\omega}{2}$
C) $\frac{F_0 A\omega}{2\sqrt{2}}$
D) $F_0 A\omega$

32. Considere un resorte caracterizado por una constante elástica K y de masa M acoplado a un cuerpo de masa *M/3.* El periodo de oscilación de este sistema es:

A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3K}}$
B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2M}{3K}}$
C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{3M}}$
D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{3M}}$

33. La ecuación de onda unidimensional que se propaga en dirección X en un hilo con tensión uniforme T y densidad lineal de masa μ puede escribirse como (y es el desplazamiento transversal de las partículas de la cuerda):

A) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
B) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
C) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
D) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{\mu}{T}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

34. Dos ondas sonoras poseen igual amplitud de desplazamiento u_0, pero la primera onda posee la tercera parte de la frecuencia de oscilación de la segunda. Puede entonces afirmarse que:

A) Las velocidades de propagación de las ondas están relacionadas en un factor de 3.
B) La intensidad promedio de la primera onda es tres veces la intensidad promedio de la segunda.
C) Las amplitudes de presión de las ondas están relacionadas en un factor de 3.
D) Los niveles de intensidad son iguales.

35. Una fuente de ondas sonoras que se desplaza uniformemente a la mitad de la velocidad del sonido, en sentido positivo del eje X, partiendo desde el origen de coordenadas, emite una señal con frecuencia f_0. Un observador en reposo, ubicado en el origen de coordenadas detectará una frecuencia igual a:

A) $f = \frac{1}{2}f_0$
B) $f = 2f_0$
C) $f = \frac{2}{3}f_0$
D) $f = \frac{3}{2}f_0$

36. En cuál de los siguientes medios el sonido no puede propagarse?

A) Sólido
B) Líquido
C) Gas
D) Vacío

37. Cuál de los siguientes fenómenos **NO** corresponde a la definición de onda longitudinal?

A) Onda Sísmica del tipo P
B) Luz
C) Sonido
D) Ultrasonido

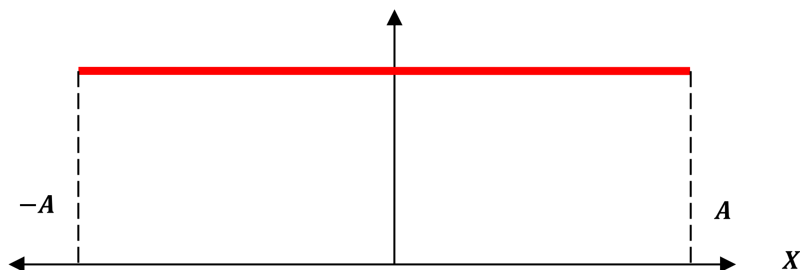
38. El ángulo crítico para un haz de luz que viaja desde el agua, con índice de refracción 1.33 hacia el aire es:

A) No existe
B) 41.25°
C) 48.7°
D) 30°

39. Dos rayos de luz interfieren destructivamente con mínima amplitud si la diferencia de camino entre ellos es:

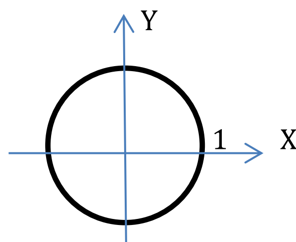
A) Una longitud de onda
B) Media longitud de onda
C) Un cuarto de longitud de onda
D) Un octavo de longitud de onda

40. Considere un objeto acoplado a un resorte ideal que oscila horizontalmente con M.A.S. La gráfica a continuación representa adecuadamente:



A) La energía potencial del resorte
B) La energía cinética del objeto
C) La energía total del sistema
D) No representa ninguna de las anteriores opciones

41. La trayectoria en el plano XY de dos movimientos armónicos transversales $X(t) = \sin(2t)$ y $Y(t) = \sin(2t + \alpha)$ corresponde a una circunferencia de radio 1, como se ilustra en la figura. En este caso, la diferencia de fase α es:



A) $\pi/2$
B) 0
C) $\pi/4$
D) π

42. La unidad del módulo de compresibilidad volumétrico B, en el sistema internacional de unidades es: (W: Vatios, s: Segundos, m: metros),

A) W/m^2
B) $W.s/m^3$
C) W/(m.s)
D) W/m^3

43. Una onda electromagnética en un medio material tiene una velocidad de 1.5×10^8 m/s. Si la frecuencia de oscilación de la onda es 500 MHz, su longitud de onda es:

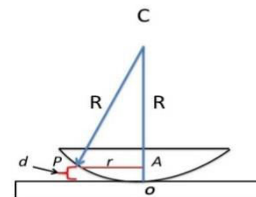
A) 3.3 m
B) 30 cm
C) 30 m
D) 33 cm

44. Las unidades del vector $c^2\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{E}$ –Campo eléctrico, $\boldsymbol{B}$- Campo Magnético, c-velocidad de la luz, ε_0-Constante dieléctrica) son: (Joules (J), Vatios (W), m (metros))

A) W
B) W/m^2
C) W
D) J/m^2

45. En la figura se muestra una lente convergente y otra plana entre cuyas superficies en contacto se forma una delgada cuña de aire. Cuando el sistema se ilumina normalmente con luz de longitud de onda λ, se observa un patrón de interferencia en forma de anillos concéntricos con centro en el punto de contacto. El diámetro del anillo brillante de Newton más pequeño que se forma en este caso es:

A) $\sqrt{R\lambda/2}$
B) $\sqrt{R\lambda}$
C) $\sqrt{2R\lambda}$
D) $2\sqrt{R\lambda}$



46. Un péndulo simple con periodo de 2 segundos tiene una longitud igual a: (g como la aceleración gravitacional)

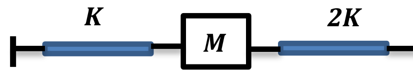
A) $g/2\pi$

B) g/π^2
C) g^2/π
D) g/π

47. En un movimiento oscilatorio con amortiguamiento, la constante de amortiguamiento es $\gamma = \ln 2$. Después de transcurrido 1 segundo, la energía total del oscilador es

A) Disminuye en 50% de su valor inicial.
B) Disminuye en 75% de su valor inicial.
C) Disminuye en 25% de su valor inicial.
D) Aumenta en 25% de su valor inicial.

48. El periodo de oscilación del sistema mostrado en la figura es:



A) $2\pi\sqrt{M/3K}$
B) $2\pi\sqrt{3M/2K}$
C) $2\pi\sqrt{M/K}$
D) $2\pi\sqrt{2M/3K}$

49. En un oscilador forzado de masa M ***SIN*** amortiguamiento, la frecuencia de la fuerza exterior es $\omega = 0.5\omega_0$. La amplitud de las oscilaciones forzadas es (F_0 como el valor máximo de la fuerza exterior aplicada)

A) $\frac{2F_0}{M\omega_0^2}$
B) $\frac{F_0}{3M\omega_0^2}$
C) $\frac{4F_0}{M\omega_0^2}$
D) $\frac{4F_0}{3M\omega_0^2}$

50. Un péndulo simple de longitud L y un disco sólido de radio R que oscila alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus bordes tendrán el mismo periodo de oscilación si:

A) $L = R$
B) $L = 2R$
C) $L = 3R/2$
D) $L = 2R/3$

51. La velocidad de propagación de las ondas mecánicas en un medio puede escribirse en general como la relación entre dos de sus propiedades intrínsecas:

A) $v = \sqrt{Propiedad\ Elástica/Propiedad\ Inercial}$
B) $v = \sqrt{Propiedad\ Elástica \times Propiedad\ Inercial}$
C) $v = \sqrt{Propiedad\ Inercial/Propiedad\ Elástica}$
D) $v = Propiedad\ Elástica/Propiedad\ Inercial$

52. Las unidades de $c^2\varepsilon_0$ c-velocidad de la luz, ε_0-Constante dieléctrica) son (C: Coulombs, m:Metros, kg: Kilogramos):

A) $\frac{C^2}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$
B) $\frac{C^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$
C) $\frac{C}{\text{kg}\cdot\text{m}}$
D) $\frac{C}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$

53. La descripción de una onda electromagnética plana en el vacío tiene una serie de parámetros asociados: $E_0, B_0, S, k, \lambda, \omega, f$. El número mínimo de parámetros necesarios para describir una onda particular que se propaga en el vacío es:

A) 4
B) 3
C) 1
D) 2

54. Una onda electromagnética en un medio material con índice de refracción 1.5 y que oscila con una frecuencia de 1 MHz, tiene una longitud de onda de:

A) 450 m
B) 50 m
C) 200 m
D) 300 m

55. El periodo de un péndulo acoplado a un elevador que baja con una aceleración de módulo $g/2$ es, con respecto al periodo de un péndulo en un sistema en reposo T, igual a:

A) $\sqrt{2/3}T$
B) $\sqrt{3/2}T$
C) $T/\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}T$

56. La diferencia entre el segundo sobretono y el armónico fundamental f_1 en un tubo sonoro con un extremo cerrado es:

(A) $2f_1$
(B) f_1
(C) $4f_1$
(D) $5f_1$

57. La velocidad de propagación de una onda longitudinal en una barra sólida homogénea es $v = \sqrt{E/\rho}$, en donde ρ es la densidad volumétrica de masa y E corresponde al módulo de Young de la barra. Las unidades del parámetro E son : (W: Vatios, s: Segundos, m: metros),

(A) W/m^2
(B) W. s/m^3
(C) W/(m.s)
(D) W/ m^3

58. La distancia mínima en la que se formará una imagen de una lente convergente de distancia focal f es:

(A) $4f$
(B) f
(C) $2f$
(D) $f/2$

59. Una lente de aumento está rotulada con factor de magnificación X3. La distancia focal de este instrumento es:

(A) 125 mm
(B) 250 mm
(C) 500 mm
(D) 62.5 mm

60. Una gota de agua esférica de diámetro ¼ cm y con índice de refracción 4/3 en aire tendrá una distancia focal igual a:

(A) ½ cm
(B) 1 cm
(C) ¾ cm
(D) ¼ cm

61. Una persona con una estatura de 1.80 m podrá verse completamente en un espejo plano a 2 m de distancia si éste tiene una altura mínima de:

(A) 1.8 m
(B) 3.6 m
(C) 0.9 m
(D) 2.0 m

62. Un haz de luz incide desde el vacío hacia una superficie de vidrio con índice de refracción $n = 2$. El ángulo de Brewster para este rayo de luz es:

(A) 63.4°
(B) 26.6°
(C) 30°
(D) 60°

63. Las unidades de la constante de permeabilidad magnética del espacio libre μ_0 son (kg : kilogramos, m : metros, s : segundos, C: Coulombs:

A) $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{C}^2$
B) $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{C}^2)$
C) $(\text{kg} \cdot \text{C}^2)/\text{m}$
D) $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^2$

64. Una fuente puntual se localiza en el origen de coordenadas y emite radiación electromagnética en forma isotrópica en el vacío. A una distancia r desde el origen, la intensidad promedio de la radiación varía según $r^{-\alpha}$, con α igual a:

A) 1
B) 2
C) -1
D) -2

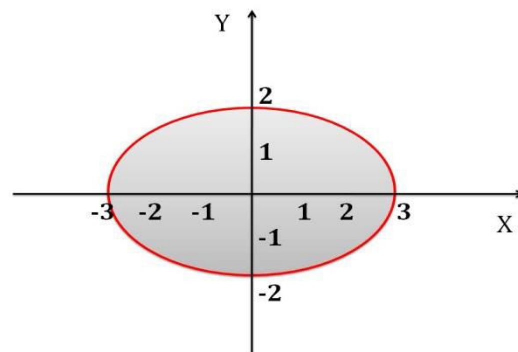
65. Una onda incide normalmente desde un medio $(\mathbf{1})$ con índice de refracción n_1 hacia un medio $(\mathbf{2})$ con índice n_2 $(n_1 > n_2)$. La diferencia de fase asociada a la onda reflejada en este caso es:

A) $\boldsymbol{\pi}$
B) $\boldsymbol{\pi/2}$
C) $\mathbf{0}$
D) $\boldsymbol{3\pi/2}$

66. Una onda incide normalmente desde un medio $(\mathbf{1})$ con índice de refracción n_1 hacia un medio $(\mathbf{2})$ con índice n_2 $(n_1 < n_2)$. La diferencia de fase asociada a la onda reflejada en este caso es:

A) $\boldsymbol{\pi}$
B) $\boldsymbol{\pi/2}$
C) $\mathbf{0}$
D) $\boldsymbol{3\pi/2}$

67. La trayectoria de una partícula está descrita por dos movimientos armónicos perpendiculares que oscilan con la misma frecuencia y se



superponen para formar la figura de Lissajous ilustrada. Las ecuaciones que describen este movimiento son:

$$X(t) = A\sin(\omega t),$$
$$Y(t) = B\cos(\omega t).$$

El valor de la relación B/A es:

A) 1/2
B) 1/3
C) 2/3
D) 3/2

68. La imagen producida por un espejo convexo siempre es:

A) Real e invertida
B) Virtual y Aumentada
C) Virtual y Reducida
D) Real y no invertida

69. La imagen producida por un espejo plano es:

A) Real no Invertida
B) Virtual Invertida
C) Virtual no Invertida
D) Real e Invertida

70. La imagen que se forma en un espejo cóncavo, cuando el objeto se coloca entre el punto focal y el vértice del espejo ($s < f$) es:

A) Aumentada, no Invertida y Virtual
B) Reducida, no Invertida y Virtual
C) Aumentada, Invertida y Virtual
D) Reducida, Invertida y Virtual

71. Sobre una película líquida con índice de refracción $n_P = 4/3$ depositada en una placa de vidrio con índice $n_V = 2$, incide normalmente una onda electromagnética de longitud de onda $\lambda = 600$ nm desde el aire, con $n_A = 1$. El espesor mínimo que la película debe tener para que ésta refleje fuertemente la luz incidente es:

A) 300 nm
B) 400 nm
C) 112.5 nm
D) 225 nm

72. Un punto ***P*** equidista de dos fuentes sonoras que irradian la misma intensidad sonora. Cuando vibra sólo una fuente, la intensidad en ***P*** es 10^{-6} W/m^2. Cuál es la intensidad en este punto si ambas fuentes vibran con la misma frecuencia y fase?

A) 0 W/m^2

B) $\sqrt{2} \times 10^{-6}$ W/m²
C) 4×10^{-6} W/m²
D) 2×10^{-6} W/m²

73. Al desplazar el espejo de calibración una distancia de 0.125 mm en un interferómetro de Michelson, se observa que el espectro de interferencia contiene 500 franjas brillantes. La longitud de onda de la luz incidente es:

A) 500 nm
B) 250 nm
C) 125 nm
D) 1000 nm

74. Una rendija de 0.25 mm de ancho está colocada delante de una lente convergente e iluminada por ondas planas de longitud de onda de 500 nm. En el espectro de difracción de Fraunhofer formado en el plano focal de la lente, se tiene que la distancia entre los primeros mínimos a los lados del máximo central es de 1 mm. La longitud focal de la lente es:

A) 50 cm
B) 25 cm
C) 12.5 cm
D) 75 cm

75. Si el radio de curvatura de la superficie convexa de una lente plano-convexa que se usa para producir anillos de Newton es de 5 m, cuál es la relación entre los radios de los dos anillos luminosos más pequeños que se pueden formar, si sobre la lente incide luz roja de un gas de Hidrógeno con $\lambda = 656$ nm?

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{5/3}$
C) $\sqrt{3/2}$
D) $\sqrt{3}$

76. Se coloca un objeto a 18 cm de una pantalla. Cuál es la distancia más cercana al objeto a la que podría colocarse una lente de distancia focal de 4 cm para obtener una imagen sobre la pantalla?

A) 6 cm
B) 12 cm
C) 14 cm
D) 4 cm

77. Una lente de 16 cm de distancia focal produce una imagen nítida del objeto en dos posiciones que distan entre sí 60 cm. La distancia que existe desde el objeto hasta la pantalla es:

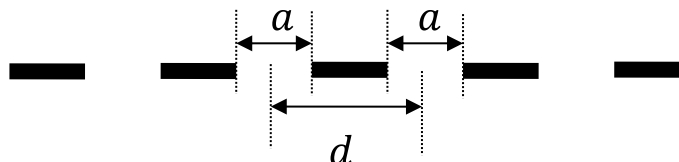
A) 36 cm
B) 100 cm

C) 64 cm
D) 120 cm

78. El espectro de mayor orden que puede resolverse en una red de difracción de constante de red igual a d, si sobre ésta incide luz de longitud de onda λ, es:

A) $2d/\lambda$
B) $d/2\lambda$
C) d/λ
D) λ/d

79. En la red de difracción de la figura adjunta, $d = 2a$. Cuántas franjas de interferencia constructiva existen en la envolvente central del máximo de difracción, cuando ésta se ilumina con luz de longitud de onda λ?

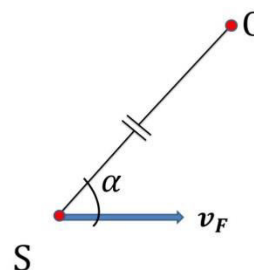


A) 1
B) 3
C) 2
D) 5

80. Ingenieros en óptica logran diseñar un gran espejo parabólico cuya ecuación en el plano XY está definida por: $y = 4x^2$ (x y y en metros). Rayos luminosos provenientes desde un objeto lejano y que inciden paralelamente al eje del espejo, formarán una imagen en la posición:

A) $y = 25$ cm
B) $y = 50$ cm
C) $y = 12.5$ cm
D) $y = 6.25$ cm

81. Suponga que una fuente de sonido $\boldsymbol{S}$ con frecuencia f_F se mueve con velocidad $\boldsymbol{v_F}$ respecto a un observador distante y en reposo $\boldsymbol{O}$. Sin embargo, $\boldsymbol{v_F}$ no se encuentra en la línea que une a la fuente y el observador, sino que forma un ángulo α que cambia según el



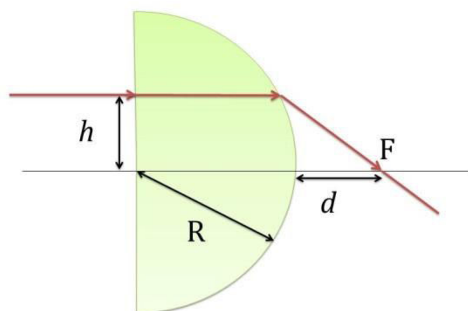
desplazamiento. En el instante en que $\alpha = 90°$, la frecuencia captada por el observador es:

A) Cero
B) Mayor que f_F.
C) Menor que f_F.
D) Igual a f_F.

82. Un sonido con un nivel de intensidad de 70 dB, tiene una intensidad _______veces mayor que la de un sonido con un nivel de intensidad de 40 dB.

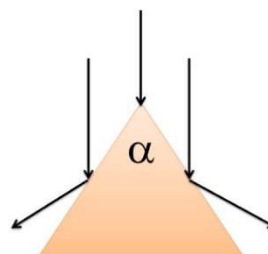
A) 1000
B) 10
C) 100
D) 10000

83. Un rayo de luz incide paraxialmente en la línea del eje óptico ($h \sim 0$) sobre una lente hemisférica de vidrio con índice de refracción $n = 3/2$ y de radio R, como se ilustra en la figura. La distancia focal d para esta lente en este caso es:



A) $3R/2$
B) $2R/3$
C) $2R$
D) $4R/3$

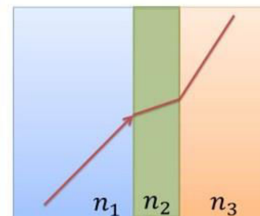
84. Rayos de luz paralelos inciden en un prisma de vidrio como se ilustra en la figura. Si $\alpha = 30$, el ángulo formado entre los dos rayos reflejados es:



A) 60°

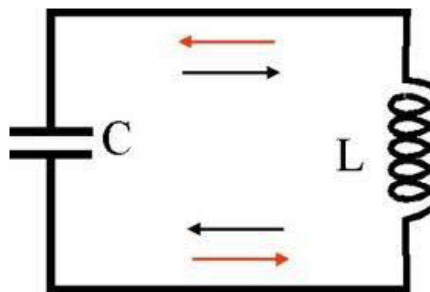
B) 120°
C) 180°
D) 150°

85. Un rayo de luz es refractado a través de tres diferentes materiales. De acuerdo con la trayectoria del haz, entonces los índices de refracción se clasifican como:



A) $n_1 > n_2 > n_3$
B) $n_1 > n_3 > n_2$
C) $n_2 > n_1 > n_3$
D) $n_1 < n_3 < n_2$

86. En el circuito $\boldsymbol{LC}$ sin pérdidas ilustrado en la figura (L-Inductancia, C-Capacitancia), la frecuencia de oscilación de la energía electromagnética entre estos dos elementos es:



A) $\sqrt{L/C}$
B) $\sqrt{C/L}$
C) $\sqrt{LC}$
D) $1/\sqrt{LC}$

87. Si el aparato del experimento de Young de doble rendija fuese sumergido en agua con índice de refracción $n = 4/3$, cómo cambiaría el patrón de franjas de interferencia?

A) La distancia entre franjas consecutivas aumentaría en un 25.0%
B) La distancia entre franjas consecutivas aumentaría en un 33.3%
C) La distancia entre franjas consecutivas disminuiría en un 33.3%
D) La distancia entre franjas consecutivas disminuiría en un 25.0%

88. Dos lentes convergentes iguales de distancia focal igual a f están separadas una distancia $4f$. Si un objeto es colocado a $2f$ desde una de las lentes, cuál es el tamaño relativo de la imagen final?

A) +2
B) +1

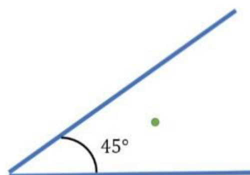
C) +0.5
D) +0.25

89. En el diagrama de difracción por una rendija para luz infrarroja de longitud de onda λ, las posiciones angulares de los mínimos de primer orden son $\theta_1 = \pm\pi/4$ rad. Cuál es el ancho de la rendija?

A) $\sqrt{2}\lambda$
B) 2λ
C) $\lambda/\sqrt{2}$
D) λ

90. Dos espejos planos son instalados formando un ángulo de 45°. Si un objeto (puntual) se coloca entre los espejos, el número de imágenes formadas por este sistema es:

A) 4
B) 6
C) 7
D) 8



91. Las unidades de ε_0 (ε_0-Constante dieléctrica del vacío) son (C: Coulombs, m:Metros, kg: Kilogramos):

A) $\frac{C^2\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m}^3}$
B) $\frac{C^2\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$
C) $\frac{C^2\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}^3}$
D) $\frac{C\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m}^3}$

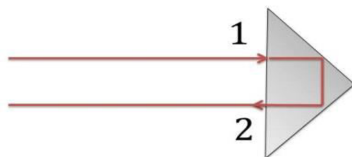
92. Existirá interferencia constructiva de segundo orden si la diferencia de camino entre dos rayos de luz es [λ como la longitud de onda de los rayos interactuantes]:

A) λ
B) $\lambda/2$
C) $3\lambda/2$
D) 2λ

93. En un experimento de doble rendija, la intensidad en un punto determinado de la pantalla debida a cada rendija es I_0. Cuál es la intensidad debida a ambas rendijas cuando las ondas tienen una diferencia de fase $5\pi/2$ rad?

A) I_0
B) $2I_0$
C) $\sqrt{2}I_0$
D) $I_0/\sqrt{2}$

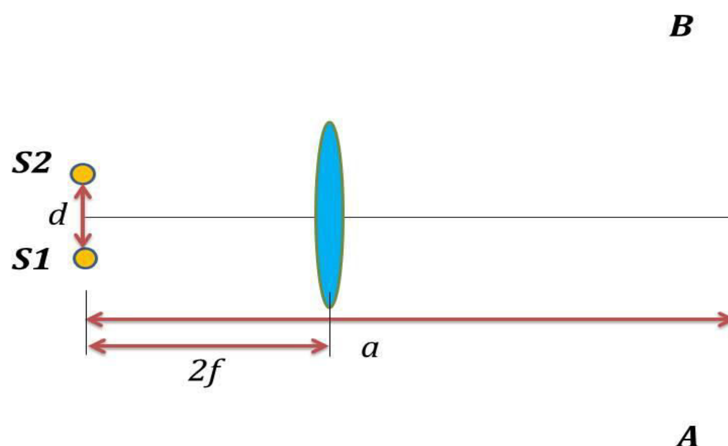
94. Un prisma de vidrio con índice de refracción $3/2$ experimenta reflexión total interna cuando un haz de luz de intensidad I_0 incide normalmente sobre su cara plana, y emerge en dirección opuesta como se ilustra en la figura. La intensidad del flujo luminoso disipada por reflexión en este proceso es:



A) $0.960I_0$
B) $0.078I_0$
C) $0.922I_0$
D) $0.040I_0$

95. Una lente delgada de distancia focal f se localiza a $2f$ de dos fuentes de luz coherentes separadas una distancia d. Si una pantalla lejana se ubica a una distancia a desde las fuentes, la nueva posición del primer máximo de interferencia cambia en un factor

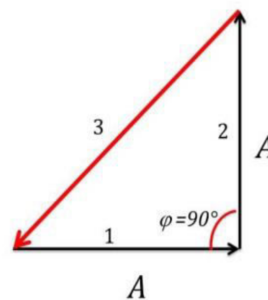
A) $1-(4f/a)$
B) $1-(2f/a)$
C) $1+(4f/a)$
D) $1+(2f/a)$



96. Un bloque de masa M está conectado a un resorte cuyo extremo opuesto se mantiene fijo. El sistema está embebido en un mecanismo viscoso de atenuación. Las siguientes observaciones se han realizado: i) Si el bloque es empujado horizontalmente con una fuerza igual a Mg, la compresión estática del resorte es h. ii) La fuerza viscosa resistiva es igual a Mg si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida u. En el caso $u = 2\sqrt{gh}$, el factor de calidad del sistema es:

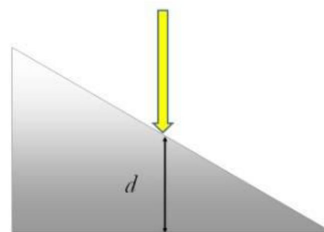
A) 1
B) 0.5
C) 2
D) 0.25

97. Tres fuentes situadas a lo largo de una línea recta oscilan en fase y dos de ellas, (1) y (2) poseen la misma amplitud. En un punto suficientemente alejado de las fuentes, el diagrama fasorial asociado a la amplitud de la radiación resultante se ilustra en la figura adjunta. Si la distancia entre las fuentes (1) y (2) es d, la distancia entre las fuentes (2) y (3) será:



A) $3d$
B) $3d/2$
C) $2d/3$
D) $2d$

98. Sobre una cuña plana muy delgada incide normalmente un tren de ondas luminosas, planas y monocromáticas de longitud de onda λ_0. Si la cuña tiene un índice de refracción igual a n y se encuentra rodeada de aire, la posición d sobre la cuña de primera franja brillante de interferencia es:



A) $2\lambda_0/n$
B) $\lambda_0/2n$
C) $4\lambda_0/n$
D) $\lambda_0/4n$

99. La amplitud del campo eléctrico E_0 a 2 m desde una fuente de luz de 100 W que emite uniformemente en todas las direcciones y en una frecuencia determinada es:

A) $\sqrt{\dfrac{25}{2\pi\varepsilon_0 c}}$
B) $\sqrt{\dfrac{25}{\pi\varepsilon_0 c}}$
C) $\sqrt{\dfrac{25}{4\pi\varepsilon_0 c}}$
D) $\sqrt{\dfrac{25}{8\pi\varepsilon_0 c}}$

100. Luz monocromática de longitud de onda variable incide normalmente sobre una película plástica delgada rodeada de aire. La luz reflejada es un mínimo únicamente para longitudes de onda de 512 nm y 640 nm en el espectro visible. Cuál es el espesor de la película ($n = 1.58$)?.

A) 162 nm
B) 405 nm
C) 810 nm
D) 607 nm

RESPUESTAS

1. A
2. A
3. B
4. D
5. D
6. C
7. B
8. D
9. B
10. C
11. A
12. B
13. C
14. A
15. D
16. C
17. C
18. A
19. A
20. D
21. D
22. A
23. D
24. A
25. B
26. B
27. C
28. C
29. D
30. D
31. A
32. B
33. B
34. C
35. C
36. D
37. B
38. C
39. B
40. C
41. A
42. B
43. B
44. B
45. C
46. B
47. B
48. A
49. D
50. C
51. A
52. B
53. D
54. C
55. D
56. C
57. B
58. C
59. A
60. D
61. C
62. A
63. A
64. B
65. C
66. A
67. C
68. C
69. C
70. A
71. D
72. C
73. A
74. B
75. D
76. A
77. B
78. C
79. B
80. D
81. D
82. A
83. C
84. A
85. C
86. D
87. D
88. C
89. A
90. C
91. C
92. D
93. B
94. B
95. A
96. C
97. B
98. D
99. A
100. C

ÍNDICE

BIBLIOGRAFIA

1. E. Gettys, F. Keller, M. J. Skove, *Física para Ingeniería y Ciencias*, Mc-Graw Hill, Vol. 2, 2005.
2. Serway-Jewet, *Física, Tomos I y II*, Thomson, 2004.
3. W. P. Crummett, A. B. Western, *University Physics: Models and Applications,* Mc-Graw Hill, 1994.
4. F. W. Sears y M. W. Zemansky, *Física, Tomos I y II*, Addison-Wesley, 2002.
5. W. Bauer y G. D. Westfall, *Física para Ingeniería y Ciencias, con Física Moderna, Vol. 2 Mc Graw Hill,* 2011.
6. Paul A. Tipler, *Física, Vol. 2.* Tercera Ed. Reverté, 1993.
7. S. Lea y J. R. Burke, *Physics: The nature of things,* Brooks/Cole Publishing Company, 1997.
8. W. C. Elmore, M. A. Heald, *Physics of Waves,* Dover 1969.
9. M. Alonso y E. J. Finn, *Mecánica*, Addison-Wesley, 1992.
10. E. Hecht, *Óptica*, Addison-Wesley, 1998.
11. L. Benavides Leonard, *Óptica y Física Moderna*, Editorial Pueblo y Educación, Univ. De la Habana, 1975.
12. A. P. French, *Vibrations and Waves,* The ***M.I.T***. Introductory Physics Series, CBS Publishers, 2003.
13. G. L. Kotkin, V. G. Serbo, *Problemas de Mecánica Clásica,* Editorial MIR-Moscú, 1980.
14. MacDonald y Burns, *Física para las Ciencias de la vida y de la Salud,* Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
15. D. C. Giancoli, *Physics, Principles with Applications,* sixth Ed., Prentice Hall Company, 2005.
16. N. Newbury, M. Newman, J. Ruhl, S. Staggs and Stephen Thorsett, *Princeton Problems in Physics with Solutions.* Princeton University Press, New Jersey, 1991.
17. Rafael I. Barraquer: *Acomodación y presbicia: un nuevo reto*, Barraquer, número 5, 2009. Consultado el 23 de enero de 2013.
18. E. Hecht, *Optics*, Shaum's Outlines Series, McGraw-Hill, 1975.
19. D. V. Sivujin, *Problemas de la Física General, Óptica,* Ed. Reverté. S.A. 1984.
20. S. J. Orfanidis, http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/ 2008.
21. http://www.fisica.uh.cu/bibvirtual/fisica_aplicada/fisicaIII/
22. http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/Encuentro/Full_text/opt_fourier/Off-01-o.pdf
23. http://aics-research.com/art/low-poissons-spot.jpg
24. http://www.efg2.com/Lab/ScienceAndEngineering/Spectra.htm
25. Weisstein, Eric W. "Bessel Function of the First Kind." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html